Lösungen und Anmerkungen

In dieser aufrechten Schrift schreibe ich, was ich als ordentliche Lösung von Ihnen erwartet hätte. *Sonstige Anmerkungen in kursiver Schrift.*

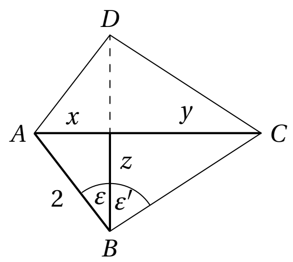
Viele von Ihnen haben eine Menge Punkte verschenkt, weil sie nicht ordentlich darstellen, was sie gerechnet haben und was sie mit den Ergebnissen anstellen. Der Lösungsweg muss vollständig nachvollziehbar sein. Außerdem müssen Sie auf die Operatoren achten. Wenn da steht „berechne“, dann kommt es auf den Gang der Rechnung an.

1. (a) $\sin\delta = -0{,}2$ Mit TR $\delta_1 = \arcsin(-0{,}2) \approx -12°$. Weitere Winkel $\delta_2 = 180° + 12° = 192°$, $\delta_3 = 360° - 12° = 348°$ und $\delta_4 = -180° + 12° = -168°$. *Zeichnen Sie alle diese Winkel in einen Einheitskreis ein, um sich darüber klar zu werden, warum es vier Lösungen gibt.*

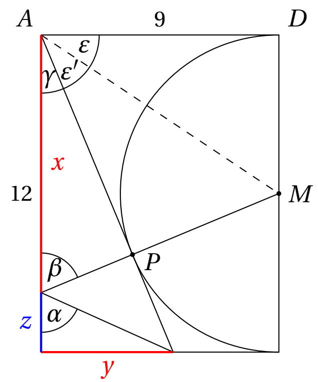
   (b) $\tan\delta = 8$ Mit TR $\delta_1 = \arctan 8 \approx 83°$. Weitere Winkel $\delta_2 = 180° + 83° = 263°$ und $\delta_3 = -180° + 83° = -97°$.

   (c) $\cos\delta = 0{,}1$ Mit TR $\delta_1 \approx 84°$. Weitere Winkel $\delta_2 = 0° - 84° = -84°$ und $\delta_3 = 360° - 84° = 276°$.

2. *Beim Drachenviereck stehen die Diagonalen bekanntlich senkrecht aufeinander und $\overline{AC}$ ist Symmetrieachse. Der Winkel bei A heißt üblicherweise α, der bei B heißt β usw. – Einzeichnen ist deshalb nicht nötig.*
   $\alpha = 180° - 2\cdot\varepsilon = 110°$ (Winkelsumme in ABD).
   $\sin\varepsilon = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\sin\varepsilon \approx 1{,}15$, $y = 5 - x \approx 3{,}85$,
   $\cos\varepsilon = \frac{z}{2} \Rightarrow z = 2\cos 35° \approx 1{,}64$.
   $\tan\varepsilon' = \frac{y}{z} \Rightarrow \varepsilon' \approx 67° \Rightarrow \beta = \delta = \varepsilon + \varepsilon' \approx 102°$.
   $\gamma = 360° - \alpha - \beta - \delta \approx 46°$ (Winkelsumme im Viereck).



3. Da die Winkel bei P und der Winkel bei D alle 90° groß sind und $\overline{MP} = \overline{MD}$, sind die Dreiecke MPA und MDA kongruent und folglich die Winkel ε und ε' gleich groß, nämlich $\varepsilon = \varepsilon' = \arctan\frac{6}{9} = 33{,}7°$. Außerdem ist $\overline{AP} = 9$. Damit gilt
   $\gamma = 90° - 2\varepsilon \approx 22{,}6°$ und $\beta = 180° - 90° - \gamma \approx 67{,}4°$.
   Wegen $\sin\beta = \frac{9}{x} \Rightarrow x = 9{,}75$ und $z = 12 - x = 2{,}25$.
   Wegen $\tan\gamma = \frac{y}{12} \Rightarrow y = 12\tan\gamma = 5$.
   Und schließlich $\alpha = \arctan\frac{y}{z} = 65{,}8°$.



4. Eine Exponentialfunktion liegt vor, wenn in gleichen Zeiten der Funktionswert um den gleichen Faktor wächst.

   (a) Die Zeiten wachsen in 1er-Schritten. Zwischen 1 und 3 fehlt ein Eintrag. Der Faktor müsste $\frac{27}{20{,}25} = \frac{4}{3}$ sein. Ich teste, ob ich damit die Werte bekomme: $f(0) = 20{,}25$; $20{,}25\cdot\frac{4}{3} = 27 = f(1)$ (ok); $27\cdot\frac{4}{3} = 36 = f(2)$ (fehlt, also kein Widerspruch); $36\cdot\frac{4}{3} = 48 = f(3)$ (ok); $48\cdot\frac{4}{3} = 64 = f(4)$ (ok). Die Anforderungen einer Exponentialfunktion sind also erfüllt.

   (b) Die Zeiten wachsen in gleichmäigen 3er-Schritten. Es reicht also zu testen, ob aufeinander folgende Werte in konstantem Verhältnis stehen: $\frac{2{,}6}{2{,}0} = 1{,}3 = \frac{3{,}38}{2{,}6}$. Das tun sie und es liegt also auch hier eine Exponentialfunktion vor.

5. Wenn $K(t)$ die Anzahl der Keime zu einer beliebigen Zeit t bedeutet, gilt

   (a) $K(t) = 1200\cdot\left(\frac{17}{6}\right)^{\frac{t}{25\,\mathrm{min}}}$, weil der Wachstumsfaktor $\frac{3400}{1200} = \frac{17}{6}$ beträgt.

   (b) $K(60\,\mathrm{min}) = 1200\cdot\left(\frac{17}{6}\right)^{\frac{60\,\mathrm{min}}{25\,\mathrm{min}}} = 1200\cdot\left(\frac{17}{6}\right)^{2{,}4} = 1200\cdot 12{,}18 \approx 14612$.

   (c) $K(-50\,\mathrm{min}) = 1200\cdot\left(\frac{17}{6}\right)^{\frac{-50\,\mathrm{min}}{25\,\mathrm{min}}} = 1200\cdot\left(\frac{17}{6}\right)^{-2} = 1200\cdot 0{,}1245 \approx 150$.

6. Für die Celsius-Temperatur T in Abhängigkeit von der Zeit t gilt $T(t) = 78\cdot 0{,}8^t$, wobei die Zeit hier in Stunden anzugeben ist. Der Wachstumsfaktor 0,8 ergibt sich aus den stündlich 20% Verlust.

   $39 = 78\cdot 0{,}8^t \Rightarrow \frac{1}{2} = 0{,}8^t \Rightarrow t = \log_{0{,}8}\frac{1}{2} = 3{,}106$.

   Die Temperatur ist also nach 3,106 Stunden auf die Hälfte gesunken.

7. (a) *Das Ergebnis bekommt man auf mehreren Wegen. Am einfachsten (wenig elegant) per Polynomdivision (wie während der Klausur empfohlen)*

   $(x^4 - 81) : (x-3) = x^3 + 3x^2 + 9x + 27$

   (Wie das geht, erspare ich mir hier. Es gibt 4 Punkte dafür, weil es vier Schritte sind.) Ein anderer Weg wäre $x^4 - 3^4 = (x^2-3^2)(x^2+3^2) = (x-3)(x+3)(x^2+3^2)$. Das ist dann auch durch (x-3) teilbar

   $$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-3^4}{x-3} = \lim_{x\to 3} x^3 + 3x^2 + 9x + 27 = 108.$$

   Etliche von Ihnen dachten wieder mal $x^4 - 3^4 = (x-3)^4$, das ist wieder mal falsch.

   (b) Das Ergebnis 108 ist die Steigung der Funktion $f(x) = x^4$ an der Stelle $x = 3$. (Der Bruch ist die Steigung einer Sekante, die durch das Annähern $x \to 3$ zur dortigen Tangente wird.)