Musterlösung und Bepunktung KlausurNr 4 2010

1a	**Gruppe A:** Der Graph B besitzt den (höchstgelegenen) Achsenabschnitt 2, was zu f_1 passt. Die anderen Graphen haben Achsenabschnitte, die noch höher liegen müssten, daher passt keine andere Funktion zu einem der weiteren Graphen. **Gruppe B:** Der Graph B besitzt den Achsenabschnitt 1, was zu f_0 passt. Die anderen Graphen haben nicht ganzzahlige Achsenabschnitte, daher passt keine andere Funktion zu einem der weiteren Graphen.	4		
1b	Zur Abspaltung der bekannten Nullstelle Polynomdivision mit (x-3) *Rechnung* Ergebnis: $1/3\,x^2 + x - 1$	2	4	
	Letzteres Polynom besitzt die Nullstellen $-1{,}5 \pm \sqrt{5{,}25}$, also $x_1 \approx 0{,}79$ $x_2 \approx -3{,}79$, also $N_2\,(0{,}79\|0)$ und $N_3(-3{,}79\|0)$	3		
	Extrempunkte: $f_2'(x) = x^2 - 4$ $f_2''(x) = 2x$ Notw. Krit.: $x^2 - 4 = 0$, also $x_{E1} = 2$, $x_{E2} = -2$.	1 1 1	2	
	Hinr. Krit.: $f_2''(x_{E1}) = 4 > 0$ also liegt dort ein Minimum vor und zwar in der Höhe $f_2(x_{E1}) = {}^{-7}/_{3}$. Ebenso ist	2		
	$f_2''(x_{E2}) = -4 < 0$ also liegt dort ein Maximum vor und zwar in der Höhe $f_2(x_{E2}) = {}^{25}/_{3}$, also HP($-2\|{}^{25}/_{3}$) und TP($2\|{}^{-7}/_{3}$).	2		
1c	Es ist $f_a'(x) = x^2 - a^2$ und $f_a''(x) = 2x$, d.h. der einzige Wendepunkt-Kandidat kann jeweils nur bei x=0 liegen. Da $f_a'''(0) = 2$ ist, liegt jeweils genau ein (rechts-links-)Wendepunkt vor.	2	2	
1d	Da nach (d) alle Wendepunkte auf der y-Achse liegen, gilt $f_a(0) = 0$, also $\frac{1}{3}0^3 - a^2 0 + a + 1 = 0$, $\Rightarrow$ a=-1, also $f_{-1}(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Diese Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung (Begründung entweder durch Einsetzen von –x oder über „ganzrationale Funktion mit nur ungeraden Exponenten")		2 2	2
1e	Damit die Aussage wahr ist, muss der Graph (irgendwo) die Steigung -1 besitzen. Vergleiche die Ableitung $f_1'(x) = x^2 - 1$ mit diesem Wert: er liegt (nur) an der Stelle x=0 vor. Damit ist die Aussage überprüft und wahr.		2	2
Σ	**Gesamt Aufgabe 1: 36 BE**	**14**	**18**	**4**
2a	(1) w(8)=0 (2) w''(14)=0 (3) w(18)=720 (4) w'(18)=0	4		
	Man benötigt also die ersten beiden Ableitungen: $w(t) = at^3+bt^2+ct+d$ $w'(t) = 3at^2+2bt+c$ $w''(t) = 6at+2b$	4		
	(I)0=512a+64b+8c+d (II)0=84a+2b (III)720=5832a+324b+18c+d (IV)0=972a+36b+c	6		

2b	$w(t) = -1{,}44t^3 + 56{,}16t^2 - 622{,}08t + 2119{,}68$ $w'(t) = -4{,}32t^2 + 112{,}32t - 622{,}08$ $w'(9) = -4{,}32 \cdot 9^2 + 112{,}32 \cdot 9 - 622{,}08 = 38{,}88$ $(w'(11) = -4{,}32 \cdot 11^2 + 112{,}32 \cdot 11 - 622{,}08 = 90{,}72)$ Das Bedeutet, …dass zu dieser Stunde die Anzahl der Wähler pro Stunde um ca. 39 (91)steigt …die lokale Änderungsrate beträgt ca. 39 (91)Wähler pro Stunde	2 2 2		
2c	Man muss den Differenzenquotienten mit den Punkten P(11|s(11)) ; Q(16|s(16)) bilden $\frac{w(16) - w(11)}{16 - 11} = \frac{645{,}12 - 155{,}52}{5} = 97{,}92$ Zwischen der dritten und achten Stunde kommen stündlich 98 Wähler in das Wahllokal	7		
2d	Es sind unterschiedliche Prognosen möglich: 1) Annahme: An einem bestimmten Tag wird die Zunahme von 10h bis 12h (11h-13h)dem durchschnittlichen Zuwachs entsprechen. Prognose: 90 + (w(12)-w(10))=90+(253,44-74,88) ≈269 (120+ (w(13)-w(11))=120+(360-155,52) ≈324) 2) Annahme: An diesem Tag wird sich um 10h (11h)die gleiche prozentuale Zunahme gegenüber der durchschnittlichen Wählerzahl um 12h(13h) ergeben, wie sie sich bereits an diesem Tag um 10h(11h) ergeben hat. $\frac{90}{w(10)} = \frac{x}{w(12)} \Leftrightarrow x = \frac{90 * 253{,}44}{74{,}88} \approx 305$ $\left(\frac{120}{w(11)} = \frac{x}{w(13)} \Leftrightarrow x = \frac{90 * 360}{155{,}52} \approx 208\right)$	5		
Σ	**Gesamt Aufgabe 2: 32 BE**	**32**		
3.a (i)	$A_J(0) = a_J \cdot b_J^0 = a_J \overset{!}{=} 4.300$ [„... am Sonntag im Regenwasser 4.300 Bequerel Jod-131 ... nachgewiesen..."] $A_J(7{,}5) = 4.300 \cdot b_J^{7{,}5} \overset{!}{=} \frac{4.300}{2} = 2.150 \quad \Rightarrow \quad b_J = \sqrt[7{,}5]{\frac{1}{2}} = 0{,}911.722.488$ [„... denn es hat nur eine Halbwertszeit von 7,5 Tagen."] Insgesamt ergibt sich daher: $\boxed{A_J(t) = 4.300 \cdot 0{,}911.722.488^t}$	1,5 1,5 2 1,5 1		
(ii)	$A_C(0) = a_C \cdot b_C^0 = a_C \overset{!}{=} 500$ [„... stellen die 500 Bequerel Cäsium, die gleichfalls..."] $A_C(30\,a) = A_C(10.950\,d) = 500 \cdot b_C^{10.950} \overset{!}{=} \frac{500}{2} = 250 \quad \Rightarrow \quad b_C = \sqrt[10.950]{\frac{1}{2}} = 0{,}999.936.7$ [„... Strahlungsintensität von Cäsium erst nach 30 Jahren um die Hälfte verringert."] Insgesamt ergibt sich daher: $\boxed{A_C(t) = 500 \cdot 0{,}999.936.7^t}$	1,5 1,5 2 1,5 1		

3.2 (A)	$A_J(t) = 4.300 \cdot 0{,}911.722.488^t \overset{!}{=} 43$ $\Leftrightarrow \quad 0{,}911.722.488^t \overset{!}{=} 0{,}01$ $\Rightarrow \quad t = \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}911.722.488} \approx 49{,}83\ d$ $A_C(t) = 500 \cdot 0{,}999.936.7^t \overset{!}{=} 50$ $\Leftrightarrow \quad 0{,}999.936.7^t \overset{!}{=} 0{,}1$ $\Rightarrow \quad t = \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}999.936.7} \approx 36.374{,}605\ d\ (\approx 99{,}66\ a)$	6		
(B)	$A_J(14) = 4.300 \cdot 0{,}911.722.488^{14} \approx 1.179{,}087 \approx 0{,}2742 \cdot A_J(0)$ Mehr als 27 % der Anfangsmenge sind also nach 14 Tagen noch übrig!!! => Die Aussage ist irreführend!	3 3		
	„Halbzeitwert“ meint: Es wird die Aktivität zur Hälfte eines (vorher festgelegten) Zeitintervalls angegeben. **„Halbwertszeit“ meint:** Es wird die Zeit angegeben, zu der ein (beliebiger) Anfangswert (hier eine Aktivität) nur noch halb so groß ist. Im Allg. sind dies aber zwei völlig verschiedene Zeiten!!!	5		
Σ	**Gesamt Aufgabe 3: 32 BE**	**32**		

Lösungen kursübergreifende Mathematikarbeit E2 2011

Aufgabe 1.1:

(1) $f'(x) = x^2 - 6x + 8$

(2) $f''(x) = 2x - 6$

$$\begin{array}{r} (2{,}5) \\ (3) \\ (3{,}5) \end{array} \begin{cases} f'(2) = 4 - 12 + 8 = 0 \\ f''(2) = 4 - 6 = -2 \neq 0 \\ f(2) = \frac{1}{3}2^3 - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (4) \\ (4{,}5) \\ (5) \end{array} \begin{cases} f'(4) = 16 - 24 + 8 = 0 \\ f''(4) = 8 - 6 = 2 \neq 0 \\ f(4) = \frac{1}{3}4^3 - 3 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 - \frac{16}{3} = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 1.2:

(1) $f'''(x) = 2$

(2) Notw. Bed $f'(x) = 0$ hinr. Bed $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ (je 0,5 pro Bed.)

(3) $0 = 2x - 6 \Leftrightarrow x = 3$ $f'''(3) = 2 \neq 0$ (je 0,5)

(4) $f(3) = \frac{1}{3}3^3 - 3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow W(3|\frac{2}{3})$

$1\frac{1}{2}$: $f'' = 0$
$1\frac{1}{2}$: $f''' \neq 0$
1 : $f(3)$

Aufgabe 1.3:

(2) Zuordnung: A und D sind keine mögliche Funktionen für F; B und C sind mögliche Funktionen

(4) A kann nicht der Graph von F sein, da beispielsweise F(4) positiv ist, f(4) jedoch 0.

(6) Der Graph D ist für x<1 streng monoton steigend, aber die Funktionswerte für f(x) sind negativ für x<1. Daher kann D auch nicht der Graph von F sein.

(auch andere sinnvolle Begründungen möglich)

Aufgabe 1.4:

(1) Zu zeigen ist: $f(x_0) = t(x_0)$ sowie $f'(x_0)=t'(x_0)=1{,}25$

(2) $\frac{1}{3}x^3 - 3 \cdot x^2 + 8 \cdot x - \frac{16}{3} = \frac{5}{4}x - \frac{16}{3}$

(3) Rechnung auflösen, daraus folgt $x_1=0$ und $x_2=4{,}5$

(4) $f'(0) = 8 \neq 1{,}25$ $f'(4{,}5) = 1{,}25$

(5) Also ist t Tangente an der Stelle $x_0=4{,}5$

$\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{27}{4}x = 0$
$\frac{1}{3} \cdot x(x^2 - 9x + \frac{81}{4}) = 0$
$x = 0 \vee (x - \frac{9}{2})^2 = 0$
$x = \frac{9}{2}$

Aufgabe 2.1:

(1) $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(2) $h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

(3) $P(0|0) \in h \rightarrow h(0) = 0 \rightarrow d = 0$

(4) $P(0|0)$ ist $TP \rightarrow h'(0) = 0 \rightarrow c = 0$ ← Unsinn

(5) $Q(12|4) \in h \rightarrow h(12) = 4 \rightarrow 1728a + 144b = 4$ I

(6) $Q(12|4)$ ist $HP \rightarrow h'(12) = 0 \rightarrow 432a + 24b = 0$ II

Aufgabe 2.2:

(1) I – 6II: $-864a = 4$ $\Leftrightarrow$ $a = -\frac{1}{\cancel{126}}$ $-\frac{1}{216}$

(2) a in II: $-2 + 24b = 0$ $\Leftrightarrow$ $b = \frac{1}{12}$

(3) $h(x) = -\frac{1}{\cancel{126}\,216}x^3 + \frac{1}{12}x^2$

Aufgabe 2.3:

(1) Gesucht ist: h(9,15) = [illegible] 3,43

(2) Antwort: Die Mauer darf maximal 3,43m hoch sein.

Aufgabe 2.4:

(1) Gesucht ist: h(x) = 2 $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{\cancel{126}\,216}x^3 + \frac{1}{12}x^2 = 2$

(2) $-\frac{1}{\cancel{126}\,216}x^3 + \frac{1}{12}x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^3 - 18x^2 + 432 = 0$ $x_1 = 6$

(3) Polynomdivision: $(x^3 - 18x^2 + 432) : (x - 6) = x^2 - 12x - 72$

(4)

(5) pq-Formel: $x_2 = 16{,}39$ $x_3 = -4{,}39$

(6) Antwort: Der Freistoß war 16,39m vom Tor entfernt.

Aufgabe 3.1.1:

(1) f(0) = 1 ✓

(2) f(10) = 28,14 ≈ 28 ✓ 28,14 f(20) = 792, 07 ≈ 792 ✓ 792,07

falls ein Wert fehlen sollte, ergibt sich ein Abzug von (je) 0,5 Punkten

Aufgabe 3.1.2:

(1) Die Pflanze wächst (ungehemmt) exponentiell

(2) Jede Woche wächst sie mit dem Faktor $2{,}7^{0{,}336} \approx 1{,}40$ 1,396169

(3) Das entspricht einer prozentualen Zunahme von 40%.

Aufgabe 3.1.3

(1) Als Grenze der Modellierung könnte die Seegröße als obere Grenze der Wachstums (oder: möglicher wachstumshemmender Nährstoffmangel, Fressfeinde etc.) genannt werden, die

(2) dem ungehemmten Wachstum, welches durch die Funktion f beschrieben wird widerspricht.

Aufgabe 3.2:

(1) Gesucht ist: $f(x) = 6{,}8 \cdot 10^{10} \Leftrightarrow 2{,}7^{0{,}336x} = 6{,}8 \cdot 10^{10}$

(2) $0{,}336x \lg(2{,}7) = \lg(6{,}8 \cdot 10^{10})$

(3) $x = \frac{\lg(6{,}8 \cdot 10^{10})}{0{,}336 \cdot \lg(2{,}7)} \approx 74{,}74$

(4) In der 75ten Woche würde der See vollständig von Hyazinthen bedeckt sein.

Aufgabe 3.3:

(1) z.B.: $f(x) = 2 \Leftrightarrow 2{,}7^{0{,}336x} = 2$

(2) $x = \frac{\lg(2)}{0{,}336 \cdot \lg(2{,}7)} \approx 2{,}07$ Wochen ≈ 14,5 Tage

(3) Antwort: Die Aussage kann als passend, da es 14,5 Tage sind, erachtet werden.

Aufgabe 3.4.1:

(1) $f'(x)$ gibt die (momentane) Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze

(2) zum Zeitpunkt x (Anzahl der Wochen) in m²/Woche an.

Aufgabe 3.4.2.:

(1) z.B.: $f'(2) \approx 0{,}65$

(2) $f'(3 \cdot 2) = f'(6) \approx 2{,}47$

(3) aber: $3 \cdot f'(2) = 1{,}95 \neq 2{,}47 = f'(3 \cdot 2)$