Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis 1

Vorbemerkung 1

1 Rechnen mit Einheiten 2
1.1 Brüche . . . 2
1.2 Kommazahlen . . . 3
1.3 Einheiten . . . 3
1.4 Aufgaben . . . 4

2 Einfache Bewegungen 5
2.1 Grundbegriffe zur geradlinigen Bewegung . . . 5
2.1.1 Ort und Strecke . . . 5
2.1.2 Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit . . . 6
2.1.3 Beschleunigung . . . 7
2.2 Abschnittsweise konstante Geschwindigkeit . . . 7
2.2.1 Diagramme . . . 8
2.2.2 Aufgaben . . . 9
2.3 Abschnittsweise konstante Beschleunigung . . . 10
2.3.1 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramm . . . 10
2.3.2 Ortsdiagramm . . . 11
2.3.3 Die Formel zum Ortsdiagramm . . . 12
2.3.4 Aufgaben . . . 13
2.4 Formelsammlung . . . 14
2.5 Eigenschaften von Masse . . . 15
2.5.1 1. Eigenschaft: Gravitation . . . 15
2.5.2 Was ist Freier Fall? . . . 15
2.5.3 2. Eigenschaft: Trägheit . . . 16
2.5.4 Vertiefung . . . 17
2.5.5 Aufgaben . . . 18

3 Relative Bewegungen 20
3.1 Ein einführendes Beispiel . . . 20
3.1.1 Lageänderung als Vektor . . . 20
3.1.2 Geschwindigkeit als Vektor . . . 21
3.1.3 Aufgaben . . . 22

3.2 Konstante Geschwindigkeiten: Ein Boot auf dem Fluss . . . 22
3.2.1 Musteraufgabe . . . 22
3.2.2 Musterlösung . . . 23
3.2.3 Aufgaben . . . 24
3.3 Senkrechter Wurf . . . 24
3.4 Waagrechter Wurf . . . 24
3.4.1 Physikalischer Hintergrund . . . 25
3.4.2 Mathematische Untersuchung . . . 25
3.4.3 Aufgaben . . . 27

4 Newtons Axiome 29
4.1 Kraft ändert Geschwindigkeit . . . 29
4.1.1 Die Kraft 1 N . . . 31
4.1.2 Aufgaben . . . 32
4.2 Actio gleich Reactio . . . 33
4.2.1 Aufgaben . . . 33
4.2.2 Impulserhaltung . . . 34
4.2.3 Beispielaufgabe zur Impulserhaltung . . . 35
4.2.4 Aufgaben . . . 36
4.3 Kräfte sind Vektoren . . . 38
4.3.1 Einleitendes Beispiel . . . 38
4.3.2 Aufgabentyp: Resultierende gegeben . . . 40
4.3.3 Aufgabentyp: Richtungen gegeben . . . 41
4.3.4 Aufgabentyp: Beträge gegeben . . . 42
4.3.5 Beispiel: Fallschirmspringer . . . 42
4.3.6 Beispiel: Schiefe Ebene ohne und mit Reibung . . . 43

5 Arbeit und Energie 45
5.1 Definitionen . . . 45
5.2 Beispiele für Arbeit . . . 45
5.2.1 Allgemein . . . 45
5.2.2 Reibungsarbeit . . . 46
5.2.3 Beschleunigungsarbeit . . . 46
5.2.4 Spannarbeit . . . 47
5.3 Energie und ihre Erhaltung . . . 47
5.4 Anwendung des Energieerhaltungssatzes . . . 49
5.4.1 Waagrechte, reibungsfreie Bewegung . . . 49
5.4.2 Pendel . . . 50
5.5 Aufgaben . . . 51

6 Zentraler Stoß **53**
6.1 Elastisch oder unelastisch 53
6.2 Der unelastische Stoß 54
6.3 Der elastische Stoß 54
6.4 Aufgaben 55

7 Kreisbewegung und Zentralkraft **57**
7.1 Fliehkraft, ein Denkfehler 57
7.2 Geschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit 57
7.3 Die Zentralkraft 58
7.3.1 Eigene Erfahrungen 58
7.3.2 Herleitung der Formel für die Zentralkraft 58
7.3.3 Versuch zur Überprüfung der Gesetze 60
7.4 Aufgaben 61

Vorbemerkung

Im Physik-Unterricht geht es im günstigen Fall heiß her: Das Durchbrechen von Denkblockaden führt zu vielen Diskussionen, und um die über die Jahre angesammelten Lücken in Mathematik auszubessern, müssen spontane Übungen in den Lernfluss eingewoben werden. Am Ende ist das Heft ein umgegrabenes Feld, und so mancher fragt sich, ob er das Wichtige in brauchbarer Reihenfolge aufgeschrieben hat.

Um knappe Energie nicht an dieser Front sinnlos zu vergeuden, können Sie dieses Skript verwenden. Ihre persönlichen Aufzeichnungen können Sie dann auf das beschränken, was Sie daneben besonders bemerkenswert finden. Was das ist, müssen Sie selber herausfinden. Lernen ist ein aktiver Prozess, in Physik wahrscheinlich noch viel mehr als in allen anderen Fächern, die Sie haben.

Es ist bemerkenswert, wie unglaublich wenig Physik Sie im ersten Halbjahr lernen! Fast alle Erkenntnisse und Formeln ergeben sich aus einfacher Arithmetik und Geometrie. Wir betreiben also erst einmal einfache Mathematik (betrachten Sie es als Nachhilfe). Wenn tatsächlich einmal Physik auftaucht, erwähne ich das ausdrücklich.

Ich garantiere, dass ich mich sehr bemühe, keine Fehler zu machen und dass mir die Vermeidung von Fehlern teilweise gelingt. Wenn Sie trotzdem welche finden, lassen Sie es mich bitte wissen!

Aus taktischen Gründen bekommen Sie dieses Skript nur stückchenweise – außerdem bin ich noch nicht fertig.

Franz Beslmeisl, 22.08.2009

1 Rechnen mit Einheiten

Physik betreibt man, um Erkenntnisse über die Natur zu erhalten. Neben dem philosophischen Interesse will man hauptsächlich Ergebnisse berechnen und mitteilen. Bevor man eine Weltraumstation betritt, will man sicher sein, dass der Sauerstoff zum Überleben reicht. Man muss also Druckbehälter einer bestimmten Größe und mit einem bestimmten Druck installieren. Das Wieviel rät man nicht, sondern rechnet es lieber aus. Und wenn dann 15,22 rauskommt, gibt man auch noch an, ob es sich um Liter, Tonnen oder bar handelt, weil ein Fehler tödliche oder wenigstens teuere Folgen hätte.

Physik fordert also als Grundlage den sicheren Umgang mit Zahlen, den Grundrechenarten und Einheiten. Deshalb hier eine kurze, intensive Wiederholung einiger Kenntnisse und Fähigkeiten.

1.1 Brüche

In physikalischen Rechnungen wird viel multipliziert und geteilt. Wenn Sie teilen trotz TR schwieriger finden als multiplizieren, dann kann das nur daran liegen, dass Sie in der Bruchrechnung nicht sattelfest sind. Ändern Sie das! Der Kern des Problems ist, dass folgende beiden Brüche nicht gleich sind:

$$\frac{12}{\frac{6}{2}} \neq \frac{\frac{12}{6}}{2}$$

Im ersten Fall kommt 4 raus, im zweiten 1. Warum ist das so? Denken Sie so lange nach, bis es Ihnen klar ist. Welches der beiden Ergebnisse bekommen Sie wenn Sie im TR tippen $12:6:2$ (erst überlegen, dann ausprobieren).

Es ist offensichtlich ausschlaggebend, dass Sie pedantisch auf die Länge der Bruchstriche achten, weil diese Information gleichbedeutend mit Klammersetzung ist. Insbesondere müssen Sie diese Pedanterie auf *Ihre* schriftlichen Äußerungen anwenden, denn Sie müssen nicht nur korrekt verstehen, sondern auch verstanden werden. Beachten Sie übrigens, dass das '=' immer auf der Höhe des längsten Bruchstrichs steht.

Wenn Sie dieses Beispiel verstanden haben, kann nichts mehr passieren, außer dass das Problem in verschachtelten Strukturen auftritt. Aber das bekommt man mit Übung gut auf die Reihe.

1.2 Kommazahlen

Taschenrechner haben nur eine begrenzte Anzahl von Stellen, müssen aber oft riesige oder winzige Zahlen verarbeiten. Das Problem sieht so aus:

$$g = 30\,000\,000\,000\,000$$
$$k = 0{,}000\,000\,000\,000\,3$$
$$s = 31\,234\,567\,890\,123$$

Sicher hätten Sie es praktischer gefunden, wenn man Ihnen gleich mitgeteilt hätte, wie viele Nullen da stehen, anstatt Ihnen einen Wust von Nullen vorzusetzen, die Sie dann zählen müssen, um die Größe der Zahlen zu erfassen. Da $3 = 3\cdot 10^0$ und $30 = 3\cdot 10^1$ ist, schreibt man $g = 3\cdot 10^{13}$ und $k = 3\cdot 10^{-13}$.

Da man sowas oft in den TR eintippen muss, gibt es eine extra Taste dafür: auf manchen Rechnern heißt sie EE, auf anderen EXP. In beiden Fällen tippt man kein '·', sondern z. B. 3 EXP 1 3.

Es ginge auch 3 × 1 0 x^y 1 3 aber natürlich nicht 3 x^y 1 3, denn $3\cdot 10^{13} \neq 3^{13}$.

Für k geht es genauso, nur mit -13 statt 13. Was ist aber mit s mit seinen vielen Ziffern ungleich 0? Man muss auf ein paar Millionen verzichten und tippt 3 . 1 2 3 4 5 6 7 EXP 1 3. Der TR hat dann die Zahl $s \approx 31\,234\,567\,000\,000$. Genauer geht's nicht.

1.3 Einheiten

Die wichtigsten Größen in der Physik sind Masse, Länge, Zeit und Stromstärke mit den zugehörigen Einheiten Kilogramm, Meter, Sekunde und Ampère.

Die Abkürzungen lauten m mit der Einheit kg, s mit der Einheit m, t mit der Einheit s und I mit der Einheit A. Beachten Sie die Verwechslungsgefahr zwischen m und m usw.

Hinzu kommen erschwerend die Vorsilben: n = nano = 10^{-9}, μ = mikro = 10^{-6}, m = milli = 10^{-3}, c = zenti = 10^{-2}, d = dezi = 10^{-1}, k = kilo = 10^3, M = Mega = 10^6. Außerdem gibt es noch min = 60 s und h = 3600 s.

Beachtenswert ist, dass Masse die einzige Größe ist, die mit einer Vorsilbe Standard ist, nämlich kg und nicht g. Selbstverständlich kombiniert man nie mehrere Vorsilben. Man schreibt also immer A statt mkA.

Wenn man Einheiten multipliziert, schreibt man sie einfach nebeneinander ohne Mal-Punkt dazwischen und dann muss man genau auf den Abstand

zwischen den Buchstaben achten, denn m A ist m · A, während mA für Milliampère steht. Achtung auch bei sowas wie $\mathrm{mA}^3 = (\mathrm{mA})^3 = (10^{-3}\,\mathrm{A})^3 = 10^{-9}\,\mathrm{A}^3$ (natürlich nur, wenn das m ein 'milli' ist und kein Meter).

Das alles sieht beängstigend unübersichtlich aus, aber die Übungen werden alles festigen.

1.4 Aufgaben

1. Berechnen Sie mit dem TR ohne Verwendung von Klammern $\frac{30}{2\cdot 3}$ und geben Sie eine Termumformung an, die zeigt, wieso Ihr Weg richtig ist.

2. Berechnen Sie mit dem TR

   $$0{,}000\,000\,000\,000\,842 : 213\,000\,000\,000\,000$$

   und schreiben Sie das Ergebnis in der umständlichen Standardnotation wie auch in wissenschaftlicher Notation auf.

3. Wenn Sie bei Ihrem TR etwas seltsam und unverständlich finden, forschen Sie sofort nach, lösen Sie das Problem und notieren Sie sich Problem und Lösung! Insbesondere die Lösung verfassen Sie unbedingt ohne fremde Hilfe!

4. Unter der Adresse `http://gow.dyndns.info:30080/~franz` gibt es Aufgabenblätter mit Lösungen. Üben Sie so lange, bis Sie auf dem Gebiet sicher sind.

2 Einfache Bewegungen

Die Bewegung von Körpern kann auf verschiedenen Bahnen verlaufen und in verschiedenen zeitlichen Abläufen. Im Unterricht untersuchen wir eindimensionale Bewegungen (vorwärts/rückwärts) und Bewegungen in der Fläche (zweidimensional) jeweils mit unterschiedlicher Beschleunigung.

Was die Beschleunigung angeht, ist der Fall ohne Beschleunigung jeweils die Grundlage und der Fall mit konstanter Beschleunigung die komplexere Variante. Schwierigere Fälle untersuchen wir nicht, weil das keine weiteren Erkenntnisse brächte, sondern nur in mathematische Quälerei ausarten würde.

2.1 Grundbegriffe zur geradlinigen Bewegung

Bei der Beschreibung von Bewegungen entlang von Geraden spielen folgende Ideen eine Rolle:

2.1.1 Ort und Strecke

Irgendwo legt man die 0-Marke fest. Befindet sich der Körper weiter vorne, so hat er einen *Ort* größer als 0, in Zeichen $x > 0$, befindet er sich weiter hinten hat er einen negativen Ort, also $x < 0$.

Bewegt sich ein Körper direkt von einem Ort zum anderen, so sagt man, er habe eine *Strecke* zurück gelegt: $\Delta x = x_2 - x_1$
Hierbei ist x_2 der Ort nachher und x_1 der Ort vorher. Das Δ bedeutet immer den *Unterschied zwischen nachher und vorher* irgendeiner Größe. Ist beispielsweise der Körper vorher bei $x_1 = -3\,\text{m}$ und nachher bei $x_2 = 4\,\text{m}$, so sind die 7 m Vorwärtsbewegung nicht nur offensichtlich, sondern auch berechenbar $\Delta x = 4\,\text{m} - (-3)\,\text{m} = 7\,\text{m}$.
Ist er vorher bei $x_1 = 4\,\text{m}$ und nachher bei $x_2 = -3\,\text{m}$, so ist die Strecke $\Delta x = -3\,\text{m} - 4\,\text{m} = -7\,\text{m}$, also negativ, weil er sich ja rückwärts bewegt hat.

2.1.2 Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit

Den Begriff *Geschwindigkeit* gibt es in mehreren Geschmacksrichtungen. Sehen wir uns die Feinheiten an:

Wenn ein Fahrzeug z. B. fortwährend schneller wird, hat es doch zu jedem Zeitpunkt eine *Momentangeschwindigkeit*. Spätestens seit es Tachometer gibt, hat jeder Mensch eine Vorstellung davon, was das ist. Wie man sie bestimmt, entwickeln wir in mehreren Schritten.

Bewegung dauert immer eine Zeit. Zeigt die Uhr am Anfang t_1 an und am Ende t_2, so ist die Dauer $\Delta t = t_2 - t_1$. Damit kann man dann die *Geschwindigkeit* ausrechnen:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2.1}$$

Wenn der Körper im obigen Beispiel zur Zeit $t_1 = 8\,\text{s}$ bei $x_1 = -3\,\text{m}$ war und zur Zeit $t_2 = 10\,\text{s}$ bei $x_2 = 4\,\text{m}$, dann war seine Geschwindigkeit $v = \frac{7\,\text{m}}{2\,\text{s}} = 3{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Hätte sich der Körper rückwärts bewegt, so wäre das Ergebnis $-3{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Während der Bewegung könnte der Körper seine Geschwindigkeit geändert haben. In diesem Fall hat man mit der obigen Formel eigentlich die *Durchschnittsgeschwindigkeit* berechnet. Will man dies ausdrücklich betonen, so schreibt man nicht v, sondern $\bar{v}$ (sprich: fau-quer).
Wenn sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist natürlich die Durchschnittsgeschwindigkeit das gleiche wie die Momentangeschwindigkeit.

Ändert sich die Geschwindigkeit des Körpers, so bekommt man die Momentangeschwindigkeit *annähernd*, indem man die Ortsänderung in möglichst kurzer Zeit betrachtet. Am besten wäre $\Delta t = 0$, was natürlich technisch nicht möglich ist.
In der Mathematik geht man immer davon aus, dass man den Ort des Körpers als Funktion der Zeit kennt, also $x_1 = x(t_1)$ und $x_2 = x(t_2)$, kurz $x = x(t)$. Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 bekommt man dann als Ableitung[1] des Ortes nach der Zeit:

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_1) = \dot{x}(t_1) \tag{2.2}$$

Beachten Sie, dass man bei der Ableitung nach der Zeit nicht x' sondern $\dot{x}$ schreibt.

[1] Die letzten Zeilen des Absatzes werden Sie erst im Lauf des Jahres und im Zusammenwirken mit dem Mathematikunterricht verstehen. Machen Sie sich keine Sorgen.

Schließlich sei noch der Fall erwähnt, wo die Bewegung eine Mischung aus Vorwärts- und Rückwärtsphasen ist. Dann berechnet man nicht nur $\bar{v}$, sondern $\overline{|v|}$, also den Durchschnitt der Beträge der Geschwindigkeiten, die der Körper hatte. Es könnte z. B. gelten $x(0) = 0$, $x(3\,\mathrm{s}) = 12\,\mathrm{m}$ und $x(5\,\mathrm{s}) = 0$. Das ergibt nach der üblichen Rechnung am Ende eine Durchschnittsgeschwindigkeit 0, weil der Körper ja am Ende genau da ist, wo er am Anfang auch war. Aber so will man es meist nicht verstanden wissen; schließlich hatte er sich ja bewegt. Man rechnet also[2] $\overline{|v|} = \frac{|12\,\mathrm{m}|+|-12\,\mathrm{m}|}{5\,\mathrm{s}} = 4{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Diese vielen unübersichtlichen Einzelheiten werden im nächsten Abschnitt nochmals graphisch veranschaulicht.

2.1.3 Beschleunigung

Von Beschleunigung spricht man, wenn sich die Geschwindigkeit ändert. Die Beschleunigung ist umso größer, je mehr sich die Geschwindigkeit ändert und je weniger Zeit das benötigt. Man definiert also

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.3}$$

Hat man etwa $v_1 = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $v_2 = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ist, und dauert der Anstieg 10 s lang, dann beträgt die Beschleunigung $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\,\mathrm{s}} = 0{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, was sehr wenig ist. (Schön übrigens, dass wir nicht mehr über Einheiten reden müssen, nachdem Sie die ausreichend geübt haben.)

Beschleunigungen können selbstverständlich auch negativ sein, wenn etwa die Geschwindigkeit nachher kleiner ist als die vorher, was einer Bremsung entspricht. Sie wird aber auch negativ, wenn man rückwärts schneller wird. Überlegen Sie sich ein geeignetes Zahlenbeispiel!

2.2 Abschnittsweise konstante Geschwindigkeit

Die oben geschilderten Ideen kann man schön graphisch veranschaulichen, indem man waagrecht die Zeit anträgt und senkrecht die jeweils interessierende Größe. Man spricht vom t-x-Diagramm (Ortsdiagramm), vom t-v-Diagramm (Geschwindigkeitsdiagramm) und vom t-a-Diagramm (Beschleunigungsdiagramm).

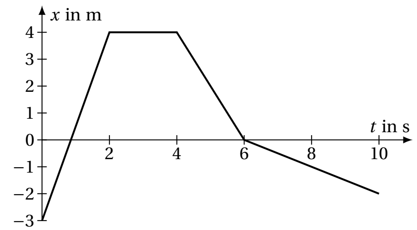
In diesem Abschnitt untersuchen wir Bewegungen, deren Geschwindigkeit sich über längere Zeitabschnitte nicht ändert. Die Beschleunigung ist also 0.

[2] Warum ist eigentlich folgendes falsch? $\left(\frac{12\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}} + \frac{12\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}}\right) : 2 = \left(4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) : 2 = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

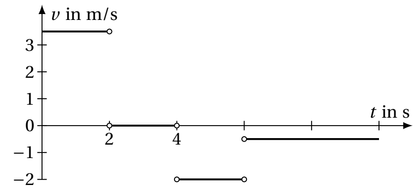
(Solche Bewegungen gibt es im exakten Sinne nicht, aber dazu kommen wir noch.)

2.2.1 Diagramme

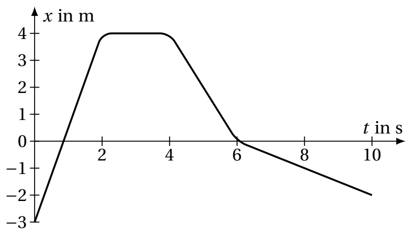
Das folgende Ortsdiagramm zeigt eine Bewegungsfolge entlang einer Geraden. Zuerst geht es in 2 s von 3 m hinten nach 4 m vorne, dann herrscht 2 s lang Stillstand. Ab $t = 4\,\mathrm{s}$ geht es 2 s lang rückwärts und dann nochmals 2 s langsamer.



Das zugehörige Geschwindigkeitsdiagramm besteht aus lauter waagrechten Geradenstücken. Da es an den Übergangsstellen keine klar bestimmbaren Geschwindigkeiten gibt, hat der Graph dort Löcher (als Kringel dargestellt).



Dass die Geschwindigkeitsabschnitte nicht zusammenhängen ist ein Zeichen dafür, dass es diese Bewegung in Wirklichkeit nicht gibt, denn kein Körper kann in 0 Zeit, seine Geschwindigkeit ändern. In Wirklichkeit müsste das Ortsdiagramm so wie im folgenden Bild aussehen, aber dann werden die Werte an den Bereichsgrenzen unangenehm.

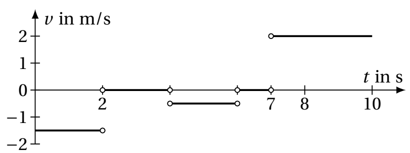


2.2.2 Aufgaben

1. Verifizieren Sie, dass das gegebene Geschwindigkeitsdiagramm korrekt ist.

2. Zeichnen Sie zu dem Ortsdiagramm mit den abgerundeten Ecken das zugehörige t-v-Diagramm. Das t-a-Diagramm können Sie nur skizzieren, weil genaue Werte aus dem Graphen nicht entnehmbar sind.

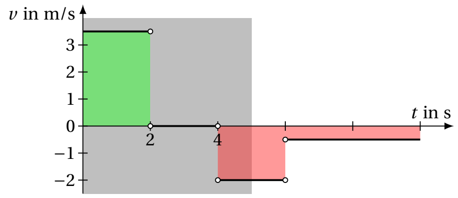
3. Von einem Körper ist bekannt, dass er sich zur Zeit $t = 0$ bei $x(0) = 4\,\mathrm{m}$ befindet und folgenden Geschwindigkeitsverlauf hat:

   Zeichnen Sie das zugehörige Ortsdiagramm, nachdem Sie alle wichtigen Zwischenwerte ausgerechnet haben.
   Berechnen Sie die die Durchschnittsgeschwindigkeit des ganzen Vorgangs.

4. Überlegen Sie sich die Bedeutung der Steigung des Graphen im Ortsdiagramm.

5. In dieser Aufgabe geht es um die *Fläche $A(t)$ unter dem Graphen* im Geschwindigkeitsdiagramm. Was das ist, wird im folgenden Bild am Beispiel $A(5\,\mathrm{s})$ erklärt:

   - Gemessen wird die Fläche *ab* der senkrechten Achse, also ab $t = 0$.
   - Gemessen wird die Fläche *bis* zu dem t-Wert, für den man sich interessiert, in unserem Beispiel $t = 5\,\mathrm{s}$.
   - Zwischen 0 und 5 s kommt erst einmal der ganze grüne Teil, der positiv gezählt wird, weil er über der waagrechten Achse liegt. Zwischen 2 s und 4 s kommt nichts weg und nichts hinzu. Ab 4 s wird Fläche abgezogen (rot).

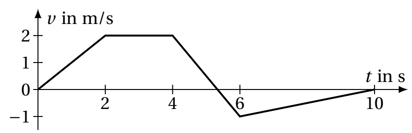
   Einige Werte zur Verständniskontrolle: $A(0) = 0$, $A(1\,\mathrm{s}) = 3{,}5\,\mathrm{m}$, $A(2\,\mathrm{s}) = 7\,\mathrm{m}$, $A(3\,\mathrm{s}) = 7\,\mathrm{m}$, $A(4\,\mathrm{s}) = 7\,\mathrm{m}$, $A(5\,\mathrm{s}) = 5\,\mathrm{m}$, $A(10\,\mathrm{s}) = 1\,\mathrm{m}$.
   Warum ist die Einheit 'm'? Überlegen Sie sich, welche anschauliche Bedeutung $A(t)$ für die Bewegung hat.

2.3 Abschnittsweise konstante Beschleunigung

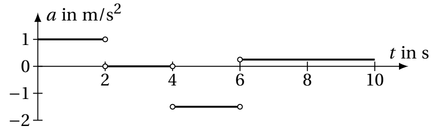
Wir betrachten im folgenden den realistischeren Fall von Bewegungen mit Beschleunigungen ungleich 0, also solchen, in deren Ortsdiagramm keine Ecken mehr auftauchen. Die einfachsten beschleunigten Bewegungen sind solche mit konstanter Beschleunigung. Obwohl auch sie in der Realität eher selten sind, werden wir diesen Schwierigkeitsgrad nicht überschreiten.

2.3.1 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdiagramm

Konstante Beschleunigung bedeutet, dass die Geschwindigkeit gleichmäßig zu- oder abnimmt. Deshalb besteht das Geschindigkeitsdiagramm nur aus Geradenstücken, wenn auch nicht mehr nur aus waagrechten.



Die Beschleunigung ist leicht aus den Geschwindigkeiten ermittelbar. Es gibt nur waagrechte Geradenstücke.



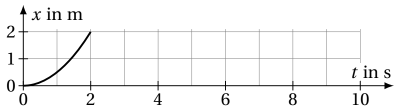
Nun ist es das t-a-Diagramm, das Sprünge macht, aber bei der Beschleunigung ist das hinnehmbar, weil die sich abrupt ändern kann im Gegensatz zur Geschwindigkeit.

Überprüfen Sie bitte genau, warum das Beschleunigungsdiagramm richtig ist, indem Sie die Werte aus dem Geschwindigkeitsdiagramm entnehmen.

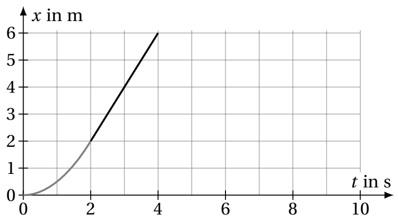
2.3.2 Ortsdiagramm

An das Ortsdiagramm tasten wir uns erst einmal nur langsam heran: Wir haben also einen Körper, dessen Geschwindigkeit während 2 s von 0 auf 2 m/s ansteigt. In der ersten Hundertstel Sekunde kommt er also nur sehr wenig voran, in der nächsten schon mehr. Es muss also eine Kurve entstehen, die immer stärker ansteigt. Aber um welchen Wert?

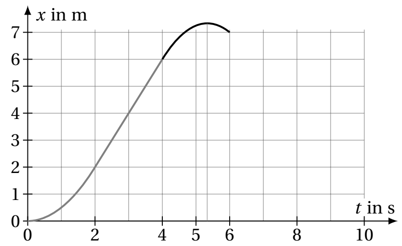
Wenn wir davon ausgehen, dass wieder die Fläche unter dem Geschwindigkeitsgraphen die hinzugekommene Strecke angibt, so erhalten wir für das erste Dreieck die Fläche $\frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{s}\cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2\,\mathrm{m}$. Der Körper bewegt sich also um 2 m weiter, wobei er seine Geschwindigkeit erhöht. Lassen wir ihn bei $x = 0$ starten (jeder andere Punkt ginge auch, aber was soll's), so bekommen wir



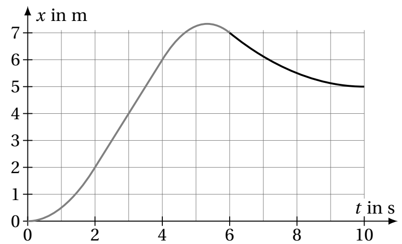
Von 2 s bis 4 s ist die Geschwindigkeit konstant, die Strecke wächst also gleichmäßig um $2\,\mathrm{s}\cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 4\,\mathrm{m}$ auf 6 m.



Von 4 s bis $5{,}\overline{3}$ s nimmt die Geschwindigkeit ab auf 0, was ihn aber immer noch nach vorne bringt um $\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}\,\mathrm{s}\cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}\overline{3}\,\mathrm{m}$. Nach dieser größten Weite bewegt er sich bis $t = 6\,\mathrm{s}$ rückwärts um $0{,}\overline{3}\,\mathrm{m}$. (Hoffentlich können Sie die seltsamen Zahlen nachvollziehen!)



Im letzten Teil bewegt sich der Körper weiter rückwärts, aber langsamer werdend bis zum Stillstand. Er bewegt sich um $\frac{1}{2}\cdot 4\,\mathrm{s}\cdot\left(-1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = -2\,\mathrm{m}$ zum Endstand 5 m. Der Graph ist gekrümmt, aber ohne Ecken.



Die ganze Bewegungsfolge ist ziemlich schwierig, weil sie aus vielen beschleunigten Bewegungen besteht (bis auf das zweite Stück). Man sieht aber, dass man mit ein bisschen Geduld auch das Ortsdiagramm hinbekommt.

2.3.3 Die Formel zum Ortsdiagramm

Wenn man solche Diagramme öfter zeichnen muss, ist dieses hoch konzentrierte Knobeln zu anstrengend. Lieber denkt man einmal ordentlich nach und verwendet die Ergebnisse ohne jedesmal das Rad neu zu erfinden.

Wir suchen also eine Formel, die uns sagt, wie weit man kommt, wenn man mit der Geschwindigkeit v_1 anfängt und mit der Geschwindigkeit v_2 aufhört und sich die Geschwindigkeit während der Zeit Δt dazwischen *gleichmäßig* von v_1 nach v_2 verändert hat. Die Idee mit der Fläche unter dem Geschwindigkeitsgraphen hat uns gute Dienste erwiesen. Aber für beschleunigte Bewegungen haben wir ihre Richtigkeit noch nicht sicher erkannt. Hier nun ein ähnlicher Gedankengang, der ebenso hilfreich ist:

Nur zu gerne würde man mit der Durchschnittsgeschwindigkeit rechnen, aber wie soll man den Durchschnitt aus unendlich vielen verschiedenen Geschwindigkeiten berechnen? Da hilft ein Trick: Weil die Geschwindigkeit laut Voraussetzung *gleichmäßig* von der Anfangs- zur Endgeschwindigkeit wächst (oder fällt), genügt es[3], den Durchschnitt aus nur diesen beiden Geschwindigkeiten zu berechnen! Es gilt also $\bar{v} = \frac{v_1+v_2}{2}$, der Rest ist Algebra.

Wir verwenden die bekannten Formeln $\Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t$ und $v_2 = v_1 + a \cdot \Delta t$.

$$\Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t = \frac{v_1 + v_1 + a \cdot \Delta t}{2} \cdot \Delta t = \frac{2v_1 + a\Delta t}{2} \cdot \Delta t = v_1 \Delta t + \tfrac{1}{2} a \Delta t^2$$

Beginnt die Beschleunigung zur Zeit $t = 0$, so kann man t statt Δt schreiben und die Formal sieht freundlicher aus

$$\Delta x = v_1 t + \tfrac{1}{2} a t^2. \tag{2.4}$$

In den hinteren Stücken des Ortsdiagramms beginnt der Vorgang aber nicht bei $t = 0$, sondern bei t_1. Wenn wir das Ende t nennen, ist die Dauer $t - t_1$. Ersetzen wir in der Formel t durch $t - t_1$, so lautet sie

$$\Delta x = v_1 (t - t_1) + \tfrac{1}{2} a (t - t_1)^2 \tag{2.5}$$

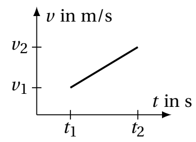
Jedenfalls nehmen wir zur Kenntnis, dass die Strecke eine quadratische Funktion von t ist. Die gekrümmten Stücke im Ortsdiagramm sind also Parabelstücke.

2.3.4 Aufgaben

1. Um die Formeln (2.5) bzw. (2.4) einzusehen, untersuchen Sie den Abschnitt zwischen 4 s und 6 s, wo das Ortsdiagramm am unangenehmsten ist. Setzen Sie für $t_1 = 4\,\mathrm{s}$, $v_1 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (t-v-Diagramm) und $a = -1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (t-a-Diagramm).
   Setzen Sie nun für t mehrere Werte im Bereich 4 s…6 s ein und rechnen Sie Δx aus. Sie bekommen damit die genauen Werte für den Streckenzuwachs ab dem Startort 6 m.
   Stellen Sie ähnliche Rechnungen für den vorderen Abschnitt des Diagramms an.

[3] Ach wirklich? Sind Sie sicher, dass Sie das verstanden haben?

2. Die in einem Zeitraum zurückgelegte Strecke haben wir vorher als Fläche unter dem Geschwindigkeitsgraphen berechnet. Tun Sie das nun im Bild rechts und finden Sie einen Zusammenhang mit der Herleitung der Formeln (2.4)/(2.5), die ja mit $\Delta x = \frac{v_1+v_2}{2} \cdot \Delta t$ beginnt.



2.4 Formelsammlung

Bis zu diesem Punkt haben wir eine Unzahl von Kleinigkeiten und Feinheiten behandelt, die in ihrer Gesamtheit den Eindruck von Komplexität vermitteln. Insbesondere die Buchstabensuppe mathematischer Formeln vermittelt so manchem den Eindruck geradezu religiöser Abstraktheit. Ziel ist aber das Gegenteil! Formeln sind der verzweifelte Versuch, nicht jedesmal den vollen Einsatz des Verstandes aufbieten zu müssen.

Formeln sind Freunde und unverstandene Formeln sind Freunde, deren Bekanntschaft man noch nicht gemacht hat. Auf jeden Fall ist es aber unerlässlich, die Aussagen zu verstehen, die dahinter stehen. Diese fassen wir hier nochmals zusammen.

Wenn ein Körper jetzt die Geschwindigkeit v_1 hat, diese sich aber in der folgenden Zeitspanne t mit der Beschleunigung a ändert, so wird die Geschwindigkeit nachher den Wert

$$v_2 = v_1 + a \cdot t \tag{2.6}$$

haben. Wenn der Körper vorher am Ort $x = 0$ ist, wird er nachher am Ort

$$x = v_1 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \tag{2.7}$$

$$= \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t \tag{2.8}$$

sein. Diese Formeln kennen wir schon länger. Hilfreich ist machmal auch eine Formel, die ohne Kenntnis der Laufzeit allein aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit den zurückgelegten Weg ergibt. Man bekommt sie so:

Aus (2.6) folgt $t = \frac{v_2 - v_1}{a}$, in (2.8) gibt $x = \frac{v_2+v_1}{2} \cdot t = \frac{v_2+v_1}{2} \cdot \frac{v_2-v_1}{a} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$. Etwas leichter merkt man sich diese Formel vielleicht so

$$2ax = v_2^2 - v_1^2 \tag{2.9}$$

Eine wichtige Anmerkung noch zum Schluss: Die hier genannten Gesetze gelten für konstante Beschleunigung. Fälle ohne Beschleunigung sind auch Fälle mit konstanter Beschleunigung $a = 0$, sodass die Gesetze auch hier gelten; andere gibt es gar nicht!

2.5 Eigenschaften von Masse

Bis jetzt haben wir nur sehr wenige physikalische Inhalte besprochen. Genau genommen beschränkt sich die Ausbeute auf die Randnotiz ganz am Anfang, dass sich die Geschwindigkeit eines Körpers nicht schlagartig ändern kann. Alles andere war Mathematik, also eine Auflistung von Tatsachen, die man allein durch klares Denken erlangen kann.

In diesem Abschnitt soll nun ein erstes Mal u. a. darüber gesprochen werden, womit es zusammenhängt, dass ein Gegenstand seine Geschwindigkeit nicht schlagartig ändern kann. Im Grunde ist der Abschnitt an dieser Stelle verfrüht, mehr Sinn hätte er *nach* den Newtonschen Axiomen. Aber um eine erträglichere Verteilung der Schwierigkeiten zu erreichen, brauchen wir den Freien Fall.

Einige der im folgenden genannten Eigenschaften werden Ihnen unglaublich erscheinen, aber sie passen genau in den Rahmen der Newtonschen Gesetze und sie sind richtig, wie wir in Versuchen nachprüfen werden.

2.5.1 1. Eigenschaft: Gravitation

Eine der beiden wesentlichen Eigenschaften von Materie ist, dass sich zwei Körper gegenseitig anziehen. Allerdings ist diese Anziehung sehr schwach, man braucht schon riesige Materiemengen, um sie wahrzunehmen. Wenn aber die Körper Planeten sind, sind die Kräfte riesig, wenn eines der Stücke ein Planet ist, ist die Anziehung immerhin gut fühlbar. Ein 80-kg-Mensch und die Erde ziehen sich immerhin mit einer Kraft von ca. 800 N an.

Diese Anziehung hat nichts mit Elektrizität oder Magnetismus zu tun. Sie existiert allein auf Grund der Massen der beteiligten Körper. Man nennt sie *Gravitation.*

2.5.2 Was ist Freier Fall?

Ein Körper befindet sich im Freien Fall, wenn nur Gravitationskräfte auf ihn wirken. Wenn ein Körper z.B. nur der Erdanziehung ausgesetzt ist[4], fällt er runter oder rauf oder auf einer krummen Bahn, je nachdem, wie er vorher geworfen wurde. Freier Fall muss also nicht auf kürzestem Wege zum Boden gehen. Der Mond etwa befindet sich im freien Fall um die Erde herum[5].

[4] Er liegt dann nicht auf dem Boden, denn wenn er das täte, würde dieser ihn nach oben drücken und am Fallen hindern.

[5] Genaugenommen sausen Mond und Erde um einen gemeinsamen Punkt herum, der auf der Linie zwischen ihren beiden Mittelpunkten liegt und ziemlich nah bei der Erde ist. Warum

Ein Körper kann sich streng genommen nur im Vakuum im Freien Fall befinden, weil er sonst Luftteilchen wegschieben muss, die ihn bremsen. Ein Fall ist immerhin noch annähernd frei, wenn die Luft nicht merklich bremst. Letzteres trifft zu, wenn der Körper keine große Angriffsfläche bietet und wenn die Geschwindigkeit noch nicht sehr groß ist. Denken Sie bei den folgenden Überlegungen also nicht an flache Grabsteine sondern an runde Felsbrocken und denken Sie an kleine Geschwindigkeiten! Oder denken Sie sich die Luft weg.

Wenn man zwei beliebige Gegenstände nebeneinander runter fallen lässt, fallen sie mit der gleichen Beschleunigung. Beide werden mit der Zeit schneller, aber beide auf die gleiche Weise. Sie befinden sich immer auf gleicher Höhe und kommen genau gleichzeitig unten an. Wenn sie das nicht tun, war der Fall nicht frei (von Luftreibungseinflüssen).

Sie sollten sich unbedingt immer an den Versuch erinnern, wo die Feder und das Geldstück gleich schnell runterfallen, wenn man die Luft aus dem Fallrohr gesaugt hat!

2.5.3 2. Eigenschaft: Trägheit

Die meisten Menschen wundern sich über das oben genannte Verhalten, weil sie der Ansicht sind, dass der schwere Körper stärker runtergezogen wird als der leichte und der schwere folglich früher unten sein müsste. *Schwere*, die Folge der Gravitation, ist uns allen sehr bewusst, weil wir jeden Tag viele Male heben müssen.

Stellen wir uns ein Bierfass und eine Tafel Schokolade vor mit den Massen 100 kg und 100 g. Das Bierfass hat eine Schwere von ca. 1000 N, die Schokolade 1 N. Man sieht: Schwere messen wir *nicht* in kg, sondern in Newton. Was bedeuten dann aber die kg-Werte, wenn nicht das Gewicht?

Die 100 kg bedeuten, dass das Bierfass sich nicht leicht in Bewegung setzen lässt (und nacher ebenso schwer zu bremsen ist). Das Bierfass ist 1000-mal so *träge* wie die Tafel Schokolade. Masse ist also ein anderes Wort für Trägheit, nicht für Gewicht. Das Gewicht des Bierfasses ist z.B. auf dem Mond auch viel geringer als auf der Erde. Es ist aber auf dem Mond genauso träge wie auf der Erde. Wenn Sie sich auf dem Mond ein Bierfass auf den Fuß stellen tut das sechsmal weniger weh als auf der Erde. Wenn Sie auf dem Mond von einem Bierfass der Geschwindigkeit 3 m/s angerempelt werden, tut es hingegen genauso weh, wie auf der Erde.

die Kreisbahn ein *Fallen* ist, müsste man genauer diskutieren. Gut, dass das jetzt nicht unser Thema ist.

Was hat das mit dem freien Fall zu tun? Das Bierfass wird 1000-mal so stark runtergezogen wie die Tafel Schokolade und müsste also viel früher unten sein. Es ist aber auch 1000-mal so träge! Die große Anziehungskraft, die die Erde darauf ausübt, wird also vollständig dafür „aufgebraucht“, es *genauso* stark zu beschleunigen wie die Tafel Schokolade.

Dass 100 kg auf der Erde 1000 N wiegen, stimmt übrigens nur ungefähr. Die genaue Umrechnungszahl ist nicht $10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$, sondern ca. $9{,}81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$. Auf anderen Planeten ist es ein anderer Wert.

Die Trägheit eines Körpers hängt übrigens nur von seiner Masse ab, nicht von seinem Material. 1 kg Federn ist also nicht nur genauso schwer wie 1 kg Blei, sondern auch genauso träge.

2.5.4 Vertiefung

Im freien Fall befindet sich ein Körper immer dann, wenn nur die Erdanziehungskraft auf ihn wirkt. Seine Abwärts-Geschwindigkeit wächst dann in jeder Sekunde um $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

- Wenn er sich also jetzt gerade mit $4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ abwärts bewegt, wird er sich in 1 s mit $14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ abwärts bewegen.
- Wenn er sich jetzt mit $4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ aufwärts bewegt, wird er sich in 1 s mit $6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ abwärts bewegen. An diese Situation denkt man meist gar nicht, aber auch wenn ein Körper nach oben geworfen wurde, befindet er sich ab dem Moment, wo er den Werfer nicht mehr berührt, im freien Fall, obwohl er sich erst einmal nach oben bewegt!
- Ein nach oben geworfener Körper befindet sich also auch in der Aufwärtsbewegung im freien Fall[6]. Irgendwann ist die Aufwärtsbewegung zu Ende und der Körper hat am Umkehrpunkt einen Moment lang die Geschwindigkeit 0. Dieser Moment unterscheidet sich von den anderen Momenten überhaupt nicht.
  Angenommen es ist ein leeres Bierfass. Dann kann in seinem Inneren (ohne Beobachtung der Außenwelt) durch nichts festgestellt werden, wann dieser Moment erreicht ist! Alle Momente fühlen sich gleich an.
  (Springen Sie mal mit geschlossenen Augen vom 3-m-Federbrett stark nach oben ab und geben Sie ein Zeichen, wenn Sie glauben, den höchsten Punkt erreicht zu haben. Jemand in der Nähe soll dann bestätigen, ob es der höchste Punkte war.)

[6] Warum?

2.5.5 Aufgaben

1. Ein Auto der Länge 5 m fährt mit 108 km/h hinter einem Lastwagen der Länge 10 m und der Geschwindigkeit 72 km/h. Es überholt den LKW mit je 5 m Sicherheitsabstand vorne und hinten. Berechnen Sie, wie lang der Vorgang dauert und wieviel Straße dafür nötig ist.

2. Ein Motorrad beschleunigt konstant von 0 auf 100 km/h in 4 s. Berechnen Sie die Beschleunigung und die Strecke, die es dabei zurücklegt.

3. Ein Fahrrad fährt mit der konstanten Geschwindigkeit 6 m/s. Als es an einem parkenden Motorrad vorbei kommt, startet dieses und beschleunigt konstant mit $3\,\mathrm{m/s^2}$. Beide Fahrzeuge werden als Punkt betrachtet.
   (a) Wann, wo und mit welcher Geschwindigkeit holt das Motorrad das Fahrrad ein?
   (b) Wann und wo ist das Motorrad so schnell wie das Fahrrad?

4. Um die Tiefe eines Brunnens zu bestimmen, lässt man einen Stein hinab fallen. Wenn er unten aufprallt, erzeugt er ein Geräusch, das mit der Geschwindigkeit $320\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach oben steigt. Zwischen Loslassen des Steins und Hören des Geräuschs vergehen 3,4 s. Wie tief ist der Brunnen?
   Um diese Aufgabe lösen zu können, müssen Sie nicht nur die Formeln kennen für konstante Geschwindigkeit und konstante Beschleunigung, sondern auch Gleichungen aufstellen, in diesem Fall zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die eine Gleichung sagt, dass die gegebene Zeit die Summe aus Fall- und Steigzeit ist. Die andere sagt, dass der Weg runter genauso lang ist, wie der Weg hoch. Wenn Sie das korrekt formuliert haben, müssen Sie nur noch eine quadratische Gleichung lösen. Lauter Dinge, die Ihnen keine wirkliche Schwierigkeiten machen sollten.
   (Die Gleichung hat übrigens zwei Lösungen, eine vernünftige und eine wahnsinnige, die aber auch nicht falsch ist.)

5. Ein frei fallender Körper passiert zwei Messpunkte im Abstand von 12 m in genau 1,0 s. Welche Geschwindigkeiten hat er bei den Messpunkten und aus welcher Höhe über dem ersten wurde er fallen gelassen?

6. Ein Stein wird mit einer Abwurfgeschwindigkeit von $32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach oben geworfen.
   (a) Wann hat er den höchsten Punkt erreicht und wie hoch ist dieser?
   (b) Wann ist der Stein wieder unten und welche Geschwindigkeit hat er dann?

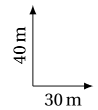
(c) Welche Geschwindigkeit hat er in 10 m Höhe? (Zwei Lösungen!)

3 Relative Bewegungen

3.1 Ein einführendes Beispiel

Wenn sich ein Körper A mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so erkennt man das immer nur an der Umgebung B – die Bewegung erfolgt relativ zur Umgebung. Das brauchten wir bisher nicht extra zu erwähnen.

Wenn sich die Umgebung B aber selber auch bewegt relativ zur einer anderen Umgebung C, wird es sprachlich schwierig. Das folgende Beispiel klärt die Problematik:

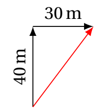


Ein Passagier geht auf dem Deck eines Schiffes[1] 30 m weit nach Osten. Das Schiff selber bewegt sich 40 m nach Norden[2]. (a) An welchen Ort hat sich der Passagier bewegt und (b) um welche Strecke[3]?

3.1.1 Lageänderung als Vektor

Der erste Teil der Frage ist leicht zu beantworten: Der Passagier befindet sich 30 m weiter östlich und 40 m weiter nördlich als am Anfang.

Wenn man sich wirklich nur für diese Lageänderung interessiert, ohne darauf zu achten, wie und in welcher Zeit sie zustande kommt, so kann man diese kurz darstellen als *einen* Pfeil (im Bild rot). Sein Fuß (Anfang) steht für den Startpunkt der Bewegung, seine Spitze für den Endpunkt.



Der Pfeil als Ganzes gibt Aufschluss darüber, in welcher Richtung (vom Anfangspunkt aus gesehen) der Endpunkt liegt, und wie weit er entfernt ist. Der Pfeil soll nicht den Eindruck erwecken, der Körper hätte sich entlang seiner bewegt! Es gibt ja schließlich viele Möglichkeiten, vom Start- zum Endpunkt zu gelangen.

Wenn sich ein Sachverhalt durch Aneinanderlegen von Pfeilen darstellen

[1] Daraus müssen Sie schließen, dass die Bewegung relativ zum Schiff erfolgt. Wenn also die Planken in N-S-Richtung verlegt sind, bewegt er sich genau senkrecht zu ihnen.

[2] Da nichts angegeben ist, müssen Sie selber die geeignete Umgebung erraten. Es ist natürlich der Meeresgrund. Die Bewegung erfolgt also relativ zur Erde.

[3] Na, an den Ort 30 m weiter östlich als er vorher war, und somit um die Strecke 30 m, könnte man meinen, steht ja so im Text. Aber da die Umgebung nicht ausdrücklich angegeben ist, meint die Frage wieder den Meeresgrund als Umgebung.

lässt, sagt man, der Sachverhalt „*hat Vektorcharakter*“ oder kurz „*ist ein Vektor*“. Lageänderungen sind also Vektoren.

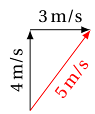
3.1.2 Geschwindigkeit als Vektor

Nun zu der Frage, um welche Strecke sich der Körper bewegt hat. Um sie zu beantworten, fehlt streng genommen noch Information. Wurden beide Bewegungen hintereinander ausgeführt? Dann ist das Ergebnis 70 m.

Aber so wollen wir die Aufgabe nicht verstanden wissen. Auch wenn es nicht ausdrücklich gesagt wird, gehen wir davon aus, dass die genannten Vorgänge immer gleichzeitig ablaufen!

Wenn sich aber Schiff und Passagier gleichzeitig bewegen, bewegt sich der Passagier tatsächlich entlang der Linie des roten Pfeils (obwohl seine Nase genau nach Osten zeigt). Nehmen Sie sich die nötige Zeit für diese Einsicht! Er legt folglich die Strecke 50 m zurück, wie Sie leicht nachrechnen können.

Als Folge dieser Überlegungen können wir auch gleich noch die Geschwindigkeit des Passagiers ausrechnen. Angenommen, der Vorgang dauert 10 s, dann hat er eine Geschwindigkeit von 5 m/s. Da wir diesen Denkprozess noch öfter brauchen, einigen wir uns auf folgende Vorgehensweise:



Wir zeichnen keine Wegpfeile mehr, sondern Geschwindigkeitspfeile, die Aufschluss darüber geben, welche Geschwindigkeiten gleichzeitig ablaufen. Der Summenpfeil gibt dann die Gesamtgeschwindigkeit an.

- Die schwarzen Pfeile stehen für die einzelnen Geschwindigkeiten: die Länge eines Pfeils gibt an, wie schnell die Bewegung ist, die Richtung des Pfeils gibt die Richtung der Bewegung an.
- Tragen mehrere Bewegungen zu einer Gesamtbewegung bei, so werden die schwarzen Pfeile aneinandergelegt, immer der Fuß des nächsten an die Spitze des vorherigen.
- Der Ergebnispfeil wird rot gezeichnet. Er beginnt am Fuß des ersten und endet an der Spitze des letzten Pfeils. Seine Richtung gibt die insgesamt zustande kommende Bewegungsrichtung an[4]. Seine Länge gibt die Gesamtgeschwindigkeit an.
- Dieses Vorgehen entspricht dem Umgang mit Vektoren, weshalb man sagen kann: *Geschwindigkeiten sind Vektoren*. (Das ist natürlich kein Wunder, denn Geschwindigkeiten sind ja nur Lageänderungen geteilt durch die Zeit, die sie dauern.)

[4] Das ist oft nicht die Richtung, in die der Körper schaut (falls er schaut).

Will man mit Richtungen und Pfeillängen rechnen, so braucht man die üblichen Kenntnisse in Trigonometrie: sin, cos, tan, Sinussatz, Cosinussatz, Pythagoras. Frischen Sie diese nötigenfalls auf!

3.1.3 Aufgaben

1. Falls Sie es noch nicht getan haben, verifizieren Sie, dass der Passagier tatsächlich mit 5 m/s vorankommt und dass seine Bewegungsrichtung von nördlich aus gemessen um 36,9° nach Osten abweicht.

2. Wie schnell und in welche Richtung muss der Passagier auf dem Schiff laufen, wenn er die gleiche Gesamtgeschwindigkeit wie bisher erreichen will (5 m/s bei 36,9°) und das Schiff aber mit 4 m/s nicht mehr nach Norden, sondern nach Westen fährt?

3.2 Konstante Geschwindigkeiten: Ein Boot auf dem Fluss

Dieser Abschnitt fügt dem vorangehenden inhaltlich nichts hinzu. Es wird lediglich eine Situation genau untersucht und vorgerechnet.

Ein Fluss der Breite 60 m fließt von Norden nach Süden mit 4 m/s. Ein Motorboot, dessen Motor relativ zum Wasser die Geschwindigkeit 6 m/s zustande bringt, überquert den Fluss.

3.2.1 Musteraufgabe

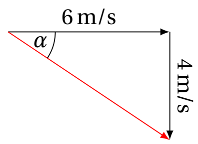
1. Wann und wo erreicht es das andere Ufer, wenn es die ganze Zeit genau in West-Ost-Richtung schaut? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt es sich (relativ zum Boden)? Berechnen Sie auch den Abtriebswinkel.
2. Um welchen Winkel muss das Boot (im Vergleich zur vorigen Teilaufgabe) nach Norden geneigt werden, damit es nicht abgetrieben wird? Nach welcher Zeit ist es drüben und mit welcher Geschwindigkeit hat es sich bewegt?
3. Wie schnell müsste das Wasser fließen, damit das Boot es nicht mehr schaffen kann, ohne Abrieb hinüber zu kommen?

Diese Aufgabe bietet viel Diskussionsstoff, weil immer wieder tief verwurzelte Falschvorstellungen durch einfache, klare Gedanken ersetzt werden müssen. Nehmen Sie aber das Richtige nicht einfach zur Kenntnis, sondern konfrontieren Sie es mit den falschen, unreflektierten Mythen im Kopf! Es ist fast noch wichtiger, genau zu verstehen, was am Falschen falsch ist.

3.2.2 Musterlösung

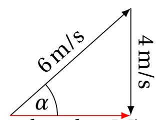
Hier nun die Lösungen mit einigermaßen genauer Diskussion der Gründe:

1. Das Boot bewegt sich in jeder Sekunde um 6 m nach rechts und der Fluss trägt es gleichzeitig um 4 m nach unten. Das Boot wird nach 10 s drüben sein (denn $t = \frac{s}{v} = \frac{60\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{m/s}} = 10\,\mathrm{s}$) und dabei um 40 m abgetrieben (denn $s = v \cdot t = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10\,\mathrm{s} = 40\,\mathrm{m}$)[5]. Die Fahrzeit und den Abtrieb haben wir also schon. Die zurück gelegte Strecke beträgt laut Pythagoras $\sqrt{5200}\,\mathrm{m} = 72{,}1\,\mathrm{m}$, also ist die Geschwindigkeit (rot) 7,21 m/s.
   Den Abtriebswinkel bekommt man mit dem Tangens

   $$\tan\alpha = \frac{4\,\mathrm{m/s}}{6\,\mathrm{m/s}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 33{,}7^\circ.$$

   Oder alles in einem $\alpha = \arctan\frac{2}{3} = 33{,}7^\circ$.
2. Um welchen Winkel muss das Boot nach Norden gedreht werden, damit es nicht abgetrieben wird? 33,7° ist eine beliebte, aber falsche Antwort. Warum? Erstens: Wie kommen Sie drauf? Sie werden es nicht begründen können, also kommt dieser Wert nicht in Frage. Zweitens: Vielleicht sehen Sie das Problem, wenn wir vorher die letzte Teilaufgabe bearbeiten und diese hier verschieben …
3. Je schneller der Fluss fließt, desto stärker muss das Boot gegenlenken. Wenn der Fluss so schnell fließt, wie das Boot fährt, muss das Boot entgegengesetzt zur Flussrichtung fahren, um dagegen zu halten. Es bewegt sich dann aber nicht mehr quer zum Fluss. Fließt er noch schneller, wird das Boot auf jeden Fall abgetrieben.
2. … damit also das Boot nicht abgetrieben wird, muss es in jeder Sekunde so viel flussauf fahren, wie es der Fluss in der gleichen Sekunde abtreibt, das sind 4 m.

   Dafür wird ein Teil seiner 6 m/s aufgebraucht. Den entstehenden Winkel berechnet man zu $\alpha = \arcsin\left(\frac{4\,\mathrm{m/s}}{6\,\mathrm{m/s}}\right) = 41{,}8^\circ$. Als Geschwindigkeit ergibt sich (rot) $\sqrt{20}\,\mathrm{m/s} = 4{,}47\,\mathrm{m/s}$. Die Überquerung dauert mit dieser Geschwindigkeit $t = \frac{60\,\mathrm{m}}{4{,}47\,\mathrm{m/s}} = 13{,}4\,\mathrm{s}$.

[5] In diesen beiden Rechnungen bedeuten s und v nicht beide Male das gleiche, Schlamperei! Aber es war je nur eine Kopfrechnung, die man so nie hinschreiben würde.

3.2.3 Aufgaben

1. Das Boot hatte in den bisherigen Aufgaben schon zwei verschiedene Endgeschwindigkeiten, je nach Winkel zur Fließrichtung. In welchem Bereich liegen die Endgeschwindigkeiten (rot), wenn das Boot immer Vollgas fährt, aber nicht unbedingt ans andere Ufer muss?

2. In welchem Winkel muss das Boot fahren, wenn es 5 m flussabwärts auf der anderen Seite ankommen will? Wie schnell ist es und wie lang dauert die Fahrt?

3.3 Senkrechter Wurf

In Aufgabe 6 zum Thema *Freier Fall* haben Sie einen senkrechten Wurf schon einmal berechnet. Hier wird nun gezeigt, dass man einen senkrechten Wurf auch auffassen kann als Zusammensetzung zweier Bewegungen:

- Der Stein bekommt von der werfenden Hand eine Aufwärtsgeschwindigkeit von $32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Gäbe es keine Erdanziehung, könnte man seinen Ort ausrechnen mit $s_a = 32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{t}$.
- Die Erde zieht den Stein nach unten, wodurch er konstant beschleunigt wird. Gäbe es nur diese Erdanziehung, so wäre sein Ort $s_b = \frac{1}{2} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{t}^2$.

Stellt man beide Anteile als Vektoren dar, so hat man einen nach oben zeigenden Vektor $\vec{s}_a$, der gleichmäßig länger wird und einen nach unten zeigenden immer schneller länger werdenden Vektor $\vec{s}_b$. Der Gesamtvektor $\vec{s}_a + \vec{s}_b$ hat die Länge $32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{t} - \frac{1}{2} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{t}^2$. Er wächst im Lauf der Zeit aufwärts, wird dann wieder kürzer und wendet sich schließlich abwärts, wohin er dann immer mehr wächst.

3.4 Waagrechter Wurf

Beim *waagrechten Wurf* bekommt ein Körper in waagrechter Richtung eine Abwurfgeschwindigkeit.

In senkrechter Richtung hat er anfangs keine Geschwindigkeit, bekommt aber zunehmend welche durch die Erdanziehung.

Einen waagrechten Wurf erzeugen Sie, wenn Sie einen Kirschkern waagrecht ausspucken. Im Mund wird er durch die ausströmende Luft beschleunigt, aber in dem Moment, wo er den Mund verlässt, hat er seine waagrechte Abwurfgeschwindigkeit. Außerdem fängt er genau jetzt an, runterzufallen.

3.4.1 Physikalischer Hintergrund

Liebe Natur, wenn ich die waagrechte und senkrechte Bewegung vollständig kennen würde, könnte ich die Gesamtbewegung wieder aus beiden zusammensetzen, weil ja Lage und Geschwindigkeit einfache vektorielle Größen sind. Besonders lieb wäre es von dir, wenn die Gesetze für die waagrechte und senkrechte Bewegung solche wären, mit denen ich schon gut umgehen kann. Wenn ich dürfte, würde ich mir wünschen:

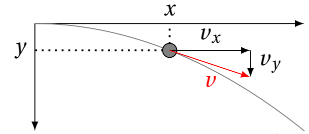
- Die waagrechte Geschwindigkeit bleibt immer so groß, wie sie beim Verlassen des Werfers war. Dass die senkrechte Geschwindigkeit sich dauernd ändert, bringt die waagrechte Geschwindigkeit nicht aus dem Konzept.
- Die senkrechte Geschwindigkeit nimmt schön gleichmäßig zu und zwar nach genau dem gleichen Gesetz, wie wenn die waagrechte Geschwindigkeit 0 wäre.

Liebe Leser, ob Sie es glauben oder nicht: die Natur ist ein ganz lieber Schatz und befolgt genau *diese* Gesetze und keine anderen oder schwierigeren. Newton formuliert es in seinen Axiomen, wie Sie in den nachfolgenden Kapiteln noch feststellen werden[6], und auch Einstein war immer der Meinung, dass ein Gesetz nur dann richtig ist, wenn es nicht mehr einfacher sein kann.

3.4.2 Mathematische Untersuchung

Zur Beschreibung der Bewegung führen wir ein paar Abkürzungen ein, die als Gesamtheit wieder eine verwirrende Buchstabensuppe ergeben werden. Seien Sie also gewappnet und vergessen Sie nicht, dass Formeln Freunde sind!

- Wenn der Körper den Wurfmechanismus verlässt, fangen wir mit der Zeitmessung an. $t = 0$ bedeutet also, dass es gerade losgeht und der Körper ab jetzt nur noch seiner Schwerkraft unterliegt (blumig formuliert).
- Der Körper ist zu jeder Zeit irgendwo. Wie weit er waagrecht von der Abwurfstelle entfernt ist, nennen wir x. Wie weit er schon abgesunken ist nennen wir y. Wir wissen also, dass bei $t = 0$ gilt: $x = 0$ und $y = 0$.
- Der Körper hat auch zu jeder Zeit irgendeine Geschwindigkeit, die man sich zusammengesetzt denken kann aus einer waagrechten Komponente v_x und einer senkrechten v_y. Wenn der Körper also zu einem bestimmten Zeitpunkt die im Bild rot gezeichnete Geschwindigkeit hat, dann denken wir uns diese zerlegt in die schwarzen Anteile (und vergessen nicht, dass v_y im nächsten Augenblick schon ein bisschen größer sein wird).



Beachten Sie, dass in y-Richtung große Werte *viel nach unten* bedeuten!

- Die Werte von x, y, v_x und v_y hängen davon ab, zu welcher Zeit nach dem Abwurf man sich für sie interessiert. Man müsste also im Grunde $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$ und $v_y(t)$ schreiben. Dazu sind wir aber zu faul.
- Die waagrechte Abwurfgeschwindigkeit, die der Körper vom Wurfmechanismus bekommen hat, nennen wir v_0. Dass sich die waagrechte Geschwindigkeit die ganze Zeit nicht ändert, notieren wir so

$$v_x = v_0 \tag{3.1}$$

Machen Sie sich bitte gleich jetzt den philosophischen Unterschied zwischen den Symbolen v_x und v_0 klar, indem Sie die Aussage $v_x(t) = v_0$ ins Deutsche übersetzen.
Bei konstanter waagrechter Geschwindigkeit (also $a = 0$) ist die nach der Zeit t erreichte Weite

$$x = v_x t = v_0 t \tag{3.2}$$

- Die senkrechte Geschwindigkeit beim Verlassen des Abwurfmechanismus ist 0, wächst aber im Lauf der Zeit. Nach (2.6) bekommt man

$$v_y = at \tag{3.3}$$

mit dem bekannten Näherungswert $a = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Die erreichte Tiefe ist laut (2.7)

$$y = \tfrac{1}{2}at^2 \tag{3.4}$$

- Hätte der Körper einen Tachometer, so würde der nicht v_x oder v_y anzeigen, sondern die rote Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + a^2 t^2} \tag{3.5}$$

Zudem weicht die rote Geschwindigkeit mit der Zeit immer mehr von der Waagrechten ab um den Winkel

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{at}{v_0} \tag{3.6}$$

[6] Schon wieder ein Hinweis, dass das Thema nach den Newtonschen Axiomen besser aufgehoben wäre. Aber auch Newton erklärt nicht, *warum* es so ist, sondern sagt nur auf eine systematisch saubere Weise *wie* es ist.

Damit ist die Situation im Grunde ausreichend untersucht: Wir können zu jeder Zeit sagen, wo der Körper genau ist, wie schnell und in welche Richtung er sich gerade bewegt. Trotzdem spielen wir noch ein bisschen weiter mit den Formeln:

- Einen Zusammenhang zwischen x und y bekommen wir, wenn wir aus (3.2) die Zeit t ausrechnen und diese einsetzen in (3.4)

$$y = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}a\left(\tfrac{x}{v_0}\right)^2 = \tfrac{a}{2v_0^2}\cdot x^2 \tag{3.7}$$

  Der Bruch vor dem x^2 ist ein fester Wert, also ist y in Abhängigkeit von x eine Parabel[7]. Diese Formel nennt man *Bahngleichung*, weil sie die Form der Flugbahn als Ganzes angibt. Sehen Sie sich das Bild auf Seite 26 nochmals an.
- Jeder waagrechte Wurf endet mit dem Aufprall nach der Flugzeit t_* auf dem Boden in der Tiefe $y = T$. Es gilt also

$$T = \tfrac{1}{2}at_*^2 \quad \Rightarrow \quad t_* = \sqrt{\frac{2T}{a}} \tag{3.8}$$

  Zu dieser Zeit hat der Körper die Flugweite

$$x_* = v_0 \cdot t_* = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2T}{a}} \tag{3.9}$$

  erreicht. Ebenso einfach bekommt man durch Einsetzen der Flugzeit in die entsprechenden Formeln auch die Auftreffgeschwindigkeit und den Auftreffwinkel

$$v_* = \sqrt{v_0^2 + 2aT} \tag{3.10}$$

$$\alpha_* = \arctan\frac{\sqrt{2aT}}{v_0} \tag{3.11}$$

  Natürlich merkt man sich die letzten vier Formeln nicht. Wenn man die anderen kennt, sind diese selbstverständlich.

3.4.3 Aufgaben

1. Warum ist die Kurve im Bild auf Seite 26 kein Ortsdiagramm?

[7] Man sieht nur die rechte Hälfte, weil es nur Werte für $t > 0$ gibt.

2. Die Formel (3.7) ist eine Parabelgleichung mit $a = 10\,\mathrm{m/s^2}$ und $v_0 > 0$. Also ist der Bruch vor dem x^2 positiv. Warum ist die Parabel dann nicht nach oben geöffnet?
3. Wenn man vom 5 m-Brett springt, möchte man auch mit Anlauf nicht über das Becken hinaus springen. Wie lang muss das Becken mindestens sein, wenn man auf dem Brett höchstens 4 m/s erreichen kann? Berechnen Sie auch Auftreffwinkel und -geschwindigkeit.
4. Ein unerfahrener Pilot lässt ein schweres Versorgungspaket genau senkrecht über dem Zielpunkt aus dem in 500 m horizontal fliegenden Flugzeug fallen. Der Sack schlägt unter einem Winkel von 70° auf dem Boden auf.
   (a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs, die Geschwindigkeit des Sackes beim Auftreffen und den Abstand des Auftreffpunktes vom Zielpunkt.
   (b) Welche Entfernung hat das Flugzeug vom Sack, wenn dieser aufschlägt?

4 Newtons Axiome

Isaac Newton (1643–1727) war einer der besten Mathematiker seiner Zeit und ein sehr gewissenhafter Naturphilosoph. Seine Überlegungen zur Bewegung von Körpern hat er in vier Axiomen auf den Punkt gebracht. Die ersten drei waren tatsächlich nummeriert von 1 bis 3. Das vierte hängte er als Bemerkung an, vielleicht weil es ihm so selbstverständlich erschien, dass man es nicht wirklich erwähnen musste.

Manchmal spricht man auch von Newtons *Gesetzen*, aber das klingt so, als hätte er sie auch anders machen können. Die Gesetze sind die genial einfach formulierten Gemeinsamkeiten aus einer Unzahl von Versuchen, die er und andere durchgeführt haben. Wegen dieser Einfachheit sucht man nicht mehr nach einem noch tieferen Grund, *warum* die Gesetze gelten, sondern nimmt sie als nicht anzugreifende Grundlagen, als sogenannte *Axiome*.

4.1 Kraft ändert Geschwindigkeit

Wenn ein Körper runter fällt wird er immer schneller: Wenn mir ein Blumentopf aus dem zweiten Stock auf den Kopf fällt, bin ich unglücklicher, als wenn er aus dem ersten Stock kommt. Dass er schneller wird, liegt daran, dass die Erde ihn während des Falls dauernd weiter anzieht und schneller macht. Jeder weiß das.

Was ist aber, wenn keine Kraft am Körper zieht? Die meisten Menschen antworten schnell und völlig sicher: Dann steht der Körper still! Und das ist auch nicht immer falsch.

Aber Isaak Newton war jemand, der lieber zweimal nachgedacht hat, und ihm schien die schnelle Antwort verdächtig, denn: Welche Umstände müssen wohl herrschen, damit ein Körper nicht schneller wird *und* nicht still steht, sondern sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt? Das gibt's doch auch! Seine Antwort ist einfach, revolutionär und passt doch zu allen Versuchen, die man je gemacht hat:

> **Newton 1':** Wenn auf einen Körper keine Kraft wirkt[1], so behält er die Geschwindigkeit, die er gerade hat. Die kann auch 0 sein, muss aber nicht.

[1] *Keine Kraft* kann auch bedeuten, dass mehrere Kräfte auf ihn wirken, die sich gegenseitig vernichten. Dazu kommen wir später noch.

Warum ist da ein Strich an der 1? Der ist nicht schön! Stimmt da was nicht? Doch! Die Aussage ist schon richtig. Aber sie trifft noch nicht ganz ins Schwarze. Es ist so ähnlich, wie wenn man sagt: Katzen sind Haustiere. Das stimmt zwar, vernachlässigt aber völlig ihre Geschmeidigkeit, Verschmustheit und ihren Eigenwillen. Man kann genaueres sagen.

Das Problem besteht darin, dass ein Körper eine Geschwindigkeit nicht im strengen Sinne *hat*. Denn wenn er sie *hätte*, wie man Geld *hat*, dann könnte er sie hergeben und dadurch verlieren. Wenn also ein Tennisschläger 30 m/s *hat* und der Tennisball *hat* 0 m/s, dann könnte der Schläger dem Ball alles abgeben und selber nichts mehr *haben*. So geschieht es aber nicht! Der Ball bekommt viel mehr Geschwindigkeit als der Schläger verliert.

Der Grund dafür ist, dass beim Schläger viel mehr Masse die Geschwindigkeit 30 m/s hat als beim Ball 0 m/s hat, der Schläger ist sozusagen „in der Überzahl". Wenn man also die Geschwindigkeit eines Körpers multipliziert mit seiner Masse, müsste man das bekommen, was er *im strengen Sinne hat*. Man nennt dieses Produkt den Wumms, die Wucht oder wissenschaftlich den Impuls[2] p

$$p = m \cdot v \tag{4.1}$$

mit der Einheit kg m/s. Das treffender formulierte Gesetz lautet damit:

> **Newton 1:** Wenn auf einen Körper keine Kraft wirkt, so behält er den Impuls, den er gerade hat. Der kann auch 0 sein, muss aber nicht.
>
> Oder als Formel:

$$F = 0 \Longleftrightarrow \Delta p = 0 \tag{4.2}$$

(Beachten Sie, dass $\Delta p = p_{\text{nachher}} - p_{\text{vorher}} = 0$ wieder gleichbedeutend ist mit $p_{\text{nachher}} = p_{\text{vorher}}$.)

Wie ändert sich nun aber der Impuls eines Körpers, wenn eine Kraft auf ihn wirkt? Wie hängt die Stärke der Kraft mit der Änderung des Impulses zusammen?

Je mehr Kraft wirkt, desto mehr ändert sich der Impuls. Aber nur, wenn die Kraft auch ein bisschen Zeit bekommt zu wirken. Je länger sie Zeit hat, desto mehr wird sich der Impuls des Körpers ändern. Das klingt so wunderbar einleuchtend, dass es wahr sein muss! Und es ist wahr:

> **Newton 2:** Wenn eine Zeit Δt lang die Kraft F auf einen Körper wirkt, so ändert sich sein Impuls um das Produkt aus beiden.
>
> Oder als Formel:

[2] Besonders gelungen ist der englische Begriff *Momentum*.

$$\Delta p = F \cdot \Delta t \tag{4.3}$$

Das Produkt auf der rechten Seite nennt man auch *Kraftstoß*. Es gilt also:

$$\textit{Impulsänderung} = \textit{Kraftstoß}$$

Wenn man über dieses zweite Gesetz ein wenig nachdenkt, merkt man, dass es das erste schon beinhaltet. Das erste ist ein Sonderfall des zweiten. Machen Sie sich das in Ruhe klar! Wenn Sie sich möglichst wenig merken wollen, dürfen Sie also das erste gleich wieder vergessen.

4.1.1 Die Kraft 1 N

Die obigen Überlegungen stellen einen Zusammenhang zwischen den Begriffen Kraft, Zeit und Impulsänderung her. Dabei erscheint Ihnen wahrscheinlich der Begriff *Impuls* am abstraktesten, während *Kraft* eher anschaulich anmutet. Es ist aber im Grunde genau andersherum: *Impuls* versteht man, wenn man *Masse*[3] und *Geschwindigkeit* verstanden hat. *Kraft* ist das, was den Impuls eines Körpers verändert, wenn man ihr Zeit zu wirken lässt.

Da die anderen Größen schon Einheiten haben, kann man jetzt mit der Formel $F = \Delta p / \Delta t = m \cdot \Delta v / \Delta t =$[4] $m \cdot a$ auch die Einheit der Kraft definieren. Und hier ist es, dass Herrn Newton die gebührende Ehre zuteil wird:

> Wenn sich die Geschwindigkeit eines Körpers der Masse 1 kg um $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ändert und diese Änderung genau 1 s braucht, so nennt man die während dieser Sekunde wirkende Kraft 1 N (1 Newton).
>
> Oder als Formel:

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg \cdot m/s}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2} \tag{4.4}$$

Wie in Abschnitt 2.5.3 besprochen, fallen in der Nähe der Erdoberfläche alle Körper mit der gleichen Beschleunigung ($9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$). Bei einem sehr trägen Körper von z. B. 1000 kg geht das nur, wenn auf ihn eine große Kraft wirkt; sein Gewicht $1000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 9810\,\mathrm{N}$ ist diese große Kraft.

[3] Zugegeben, *Masse* ist ein schwieriges Konzept.

[4] Wenn sich der Impuls mit der Zeit nicht gleichmäßig ändert, muss man statt $\Delta p / \Delta t$ wieder die Ableitung $\dot{p}$ nehmen. In der 12. Klasse lernen Sie die Produktregel $\dot{p} = m \cdot \dot{v} + \dot{m} \cdot v$. In den Aufgaben, die Sie kennenlernen werden, ändert sich die Masse aber nicht nennenswert im Lauf der Zeit, also ist $\dot{m} = 0$ und die Formel vereinfacht sich zu $\dot{p} = m \cdot \dot{v} = m \cdot a$.

4.1.2 Aufgaben

1. Auf einen ruhenden Körper der Masse 5 kg wirkt 0,01 s lang die Kraft $F = 20\,\mathrm{N}$.
   (a) Welchen Impuls erhält der Körper dadurch?
   (b) Welche Geschwindigkeit hat der Körper nach diesem Stoß?
   (c) Welche Beschleunigung erfährt der Körper dabei?

2. Welche Rückstoßkraft fühlt ein Feuerwehrmann, der einen Feuerwehrschlauch hält, aus dem pro Sekunde 8 ℓ Wasser mit der Geschwindigkeit $v = 20\,\mathrm{m/s}$ austreten?

3. Eine Silvesterrakete erzeugt für 5,1 s eine Schubkraft von 1,2 N. Dabei verliert sie 12,5 g an Masse. Mit welcher Geschwindigkeit strömen die Gase aus?

4. Ein Auto der Masse 1500 kg fährt mit der Geschwindigkeit 5 m/s gegen einen Betonpfeiler. Die Knautschzone gibt um 20 cm nach. Die Berührfläche zwichen Blech und Beton beträgt $1\,\mathrm{m^2}$. Berechnen Sie die (durchschnittliche) Kraft auf den Betonpfeiler und den Druck. (Gehen Sie davon aus, dass das Auto nicht zurück prallt.)
   Vergleichen Sie die Werte mit denen eines Hammers, der mit der gleichen Geschwindigkeit einen Nagel in Holz schlägt. (Denken Sie sich vernünftige Werte für diese Situation aus.)

5. Die von einem Astronauten ($m = 80\,\mathrm{kg}$) bei einem Weltraumspaziergang verwendete Rückstoßpistole stößt pro Sekunde 40 g Gas mit der Geschwindigkeit $v = 150\,\mathrm{m/s}$ aus. Wie groß ist die Kraft auf den Astronauten und wie groß die Beschleunigung, die er dadurch erfährt?

6. Ein Stein der Masse $m = 3\,\mathrm{kg}$ wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = 6\,\mathrm{m/s}$ senkrecht nach unten geworfen.
   (a) Welche Impulszunahme erfährt der Stein infolge seiner Gewichtskraft in den ersten 3 Sekunden?
   (b) Wie groß ist seine Geschwindigkeit dann?
   (c) Welchen Kraftstoß erteilt er der Erde, wenn er genau dann aufprallt und liegen bleibt?
   (d) Begründen Sie, ob die Erde dabei (minimal) aus ihrer Bahn gebracht wird.

4.2 Actio gleich Reactio

Wenn der Gummi einer Steinschleuder einen Stein beschleunigt, so wirkt auf den Stein eine Kraft, die vom Gummi herrührt; der Gummi drückt den Stein. Es darf aber nicht vergessen werden, dass der Gummi ebenfalls einen Druck fühlt, und zwar genauso groß und in die entgegengesetzte Richtung. Diesen Druck übt der Stein auf den Gummi aus. Dass ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt ohne Konsequenzen auf ihn selbst, ist unmöglich. Das dritte Gesetz bringt dies zum Ausdruck:

> **Newton 3:** Wenn Körper A auf Körper B eine Kraft ausübt, so übt auch B auf A eine ebenso große Kraft in entgegengesetzter Richtung aus.
>
> Oder als Formel:

$$F_{AB} = -F_{BA} \tag{4.5}$$

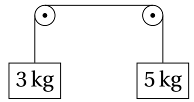
Wenn also ein Stein von der Erde 100 N stark angezogen nach unten beschleunigt wird. so wirken auch auf die Erde 100 N und zwar nach oben. Der Stein zieht auch die Erde an. Also wird die Erde nach oben beschleunigt! Die Erde ist allerdings ein bisschen träger als der Stein und wird deshalb nur unmerklich losflitzen.

4.2.1 Aufgaben

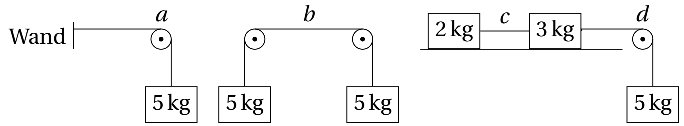
1. Eine dünnwandige Bleihohlkugel H und eine 100-mal so schwere Bleivollkugel V werden gleichzeitig fallen gelassen. Erläutern Sie die wirkenden Kräfte und begründen Sie, welche von beiden früher unten ankommt, wenn
   (a) der Raum evakuiert ist.
   (b) normale Bedingungen herrschen.

2. Ein Aufzug des Gesamtgewichts 8000 N fährt mit der Geschwindigkeit 5 m/s aufwärts.
   (a) Mit welcher Kraft muss der Motor das Seil ziehen?
   (b) Mit welcher Kraft musste er das Seil ziehen, um diese Geschwindigkeit aus der Ruhe heraus innerhalb von 5 s zu erreichen?
   (c) Mit welcher Kraft muss er die letzten 5 s der Fahrt ziehen, wenn der Aufzug in dieser Zeit zur Ruhe kommen soll? Wie stark, nachdem der Aufzug steht?

3. Wie groß ist die Beschleunigung der Gewichte und wie stark ist das Seil gespannt, wenn (a) das linke, (b) das rechte, (c) gar kein Gewicht festgehalten wird?



4. Berechnen oder begründen Sie, mit welcher Kraft die Seilstücke a bis d gespannt sind. (Die beiden Klötze in der letzten Teilaufgabe rutschen reibungsfrei.) Geben Sie auch an, wie stark die Massen jeweils beschleunigt werden.

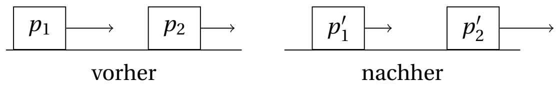


4.2.2 Impulserhaltung

Das dritte Axiom erweckt nicht den Eindruck großer Wichtigkeit, hat aber erhebliche Konsequenzen, wenn man es zu Ende denkt: den Impulserhaltungssatz.

Wir betrachten zwei Körper, die vor dem Stoß auf Grund ihrer Massen und Geschwindigkeiten (die wir hier nicht kennen müssen) die Impulse p_1 und p_2 haben. Dann stoßen sie irgendwie aneinander. Dabei können sie sich verheddern, eine Weile aneinander reiben, sich wieder trennen oder auch nicht. Jedenfalls haben sie nachher die Impulse p_1' und p_2'.

Das folgende Bild zeigt eine mögliche Situation, bei der m_1 auf m_2 auffährt und ihn wegkickt. Die Geschwindigkeiten können aber auch ganz andere sein, z. B. teilweise nach links zeigen.



Interessant ist der Gesamtimpuls beider Körper. Vorher beträgt er

$$p = p_1 + p_2$$

Während des Stoßes ändert sich laut Newton 2 der Impuls des ersten Körpers um $\Delta p_1 = F \cdot \Delta t$, wobei F die Kraft ist, die der zweite Körper auf ihn ausübt und Δt die Zeit, die das dauert.

Während des Stoßes ändert sich aber auch der Impuls des zweiten Körpers. Auf ihn wirkt laut Newton 3 die entgegengesetzt gleiche Kraft $-F$ und sie wirkt natürlich genauso lang, also Δt, denn der eine Körper berührt den anderen genauso lang, wie der andere den einen. Es gilt also $\Delta p_2 = -F \cdot \Delta t$.

Der Gesamtimpuls nach dem Stoß beträgt somit

$$p' = p_1' + p_2' = p_1 + \Delta p_1 + p_2 + \Delta p_2 = p_1 + F \cdot \Delta t + p_2 - F \cdot \Delta t = p_1 + p_2 = p$$

Wie man sieht, ist der Gesamtimpuls vorher und nachher gleich groß, weil der eine Körper den Impuls hinzubekommt, den der andere verliert.

So etwas nennt man einen Erhaltungssatz und Erhaltungssätze sind sehr praktisch, weil man mit ihnen Ergebnisse bekommt, ohne auf Feinheiten achten zu müssen.

4.2.3 Beispielaufgabe zur Impulserhaltung

Ein Kind von 25 kg fährt in einem Bollerwagen von 23 kg mit der Geschwindigkeit 3 m/s nach links. Es springt nach rechts ab, und zwar so stark, dass es sich sogar ein klein wenig nach rechts bewegt (0,5 m/s).

(a) Welche Geschwindigkeit hat der Bollerwagen jetzt?

(b) Wie war das Kräftespiel während des Sprunges?

Der erste Teil ist ganz einfach: Wagen und Kind haben vor dem Sprung einen Gesamtimpuls und danach den gleichen. Den Impuls vorher können wir ausrechnen, weil wir alles wissen. Vom Kind können wir den Impuls nachher ausrechnen. Also bekommen wir auch den Impuls des Wagens nachher. In Zahlen: Vorher

$$p_1 + p_2 = 25\,\mathrm{kg} \cdot 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 23\,\mathrm{kg} \cdot 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 144\,\mathrm{Ns}$$

Das Kind bewegt sich nachher in die andere Richtung, also rechnen wir seine Geschwindigkeit negativ

$$p_1' = 25\,\mathrm{kg} \cdot \left(-0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = -12{,}5\,\mathrm{Ns}$$

Also bleiben für den Wagen

$$p_2' = 144\,\mathrm{Ns} - (-12{,}5\,\mathrm{Ns}) = 156{,}5\,\mathrm{Ns} = 23\,\mathrm{kg} \cdot v_2'.$$

Das heißt, seine Geschwindigkeit muss $v_2' = 6{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ betragen, und zwar nach links, weil der Wert positiv ist und wir die Bewegungen nach links von Anfang an positiv gezählt haben.

Natürlich schreiben wir das wie immer viel kürzer hin, indem wir die Formel *erst* auflösen und *dann* die Werte einsetzen:

$$\begin{aligned} p' = m_1 v_1' + m_2 v_2' &= m_1 v_1 + m_2 v_2 = p \\ v_2' &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_1'}{m_2} = \ldots = 6{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Die zweite Frage ist rein rhetorisch – ohne weitere Angaben können wir sie nicht beantworten. Der Schenkel des abspringenden Kindes wird mit kleiner Kraft begonnen, sich dann auf ein Maximum gesteigert und zum Ende hin wieder abgenommen haben. Das alles hat sich in weniger als einer Sekunde abgespielt. Wenn am Schuh ein Kaugummi klebte, kann der Wagen im letzten Moment sogar noch ein klein bisschen zurück gezogen worden sein. Die Prozesse können also sehr kompliziert sein! Wenn aber das Kind die gegebene Endgeschwindigkeit bekommen hat, dann muss der Wagen als Netto-Endergebnis den berechneten Wert bekommen haben, egal, wie kompliziert er zustande gekommen ist.

Damit die zweite Frage berechenbar ist, wird in manchen Aufgaben vorausgesetzt, dass der Schenkel des Kindes mit *konstanter* Kraft geschoben hat (physikalischer Unsinn), oder man fragt nach der *durchschnittlichen* Kraft. Die kann man tatsächlich ausrechnen, wenn man weiß, wie lang der Vorgang gedauert hat, sagen wir 0,5 s.

Die Impulsänderung des Kindes $m_1 v_1' - m_1 v_1$ ist ja laut Newton 2 Folge eines Kraftstoßes $F \cdot \Delta t$, also

$$F = \frac{m_1 v_1' - m_1 v_1}{\Delta t} = \frac{25\,\mathrm{kg} \cdot (-0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})}{0{,}5\,\mathrm{s}} = -175\,\mathrm{N}$$

Da wir mit den Zahlen des Kindes gerechnet haben, bekommen wir auch die Kraft auf das Kind, und die ist negativ, weil sie nach rechts wirkt. Hätten wir mit dem Wagen gerechnet, so wären 175 N heraus gekommen, also der gleiche Wert, aber nach links.

4.2.4 Aufgaben

1. Die Erde hat eine Masse von ca. $5 \cdot 10^{24}$ kg. Ein Stein von 5 kg wird aus einer solchen Höhe fallen gelassen, dass der Fall 1 s dauert. Welche Geschwindigkeit erreicht der Stein und welche die Erde kurz vor dem Moment, wo beide aufeinander treffen? Wie ist es nach dem Aufeinandertreffen?

2. Ein 500 g-Ball fliegt mit der Geschwindigkeit $v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$ in die Arme des in lotrechter Richtung hochgesprungenen Torwartes ($m = 75\,\mathrm{kg}$).

(a) Welcher Impuls wird dadurch auf den Torwart übertragen?
(b) Welche Rückwärts-Geschwindigkeit bekommt der Torwart?
(c) Welche Kraft wirkt auf den Torwart, wenn er den Ball innerhalb von 0,1 s abfängt?

3. Bei einer Pistole tritt die Kugel ($m = 6\,\mathrm{g}$) mit der Geschwindigkeit $v = 320\,\mathrm{m/s}$ aus dem 8 cm langen Lauf aus. Die Beschleunigung der Kugel im Lauf werde als konstant angenommen.
   (a) Wie groß ist die beschleunigende Kraft und wie groß der Kraftstoß?
   (b) Wie groß ist die Rückstoßgeschwindigkeit der Pistole, wenn diese eine Masse von 860 g besitzt?
   (c) Wie groß ist die Kraft auf die Hand des Schützen, wenn dieser den Rückstoß in 0,1 s auffängt?

4. Eine Frau von 45 kg Masse saust in einem Kanu von 32 kg Masse 3 m/s auf das Ufer zu. Kurz bevor es anstößt, springt sie so ab, dass das Kanu dadurch zur Ruhe kommt. Welche Geschwindigkeit hat sie dadurch jetzt? Wie lang hat ihr Sprungvorgang gedauert, wenn er (durchschnittlich) 250 N stark war?

5. Die im Bau befindliche internationale Raumstation ISS wird regelmäßig von Transport- und Versorgungsraumschiffen angeflogen. Bei seiner Annäherung an die Raumstation wird ein solches Versorgungsschiff durch Raketentriebwerke abgebremst, bevor es an die Raumstation ankoppelt.
   (a) Die beiden Triebwerke eines Versorgungsschiffes haben je 4,5 kN Schubkraft. Die Ausströmgeschwindigkeit der Triebwerksgase beträgt 2,3 km/s. Wie groß ist der Massenausstoß an Treibstoffgasen in jeder Sekunde?
   (b) Ein Versorgungsschiff ($m = 7{,}4\,\mathrm{t}$) nähert sich mit der Geschwindigkeit $v = 20\,\mathrm{m/s}$ der Raumstation. Wie lange dauert es, um das Schiff auf die Ankoppelgeschwindigkeit von $v_K = 0{,}5\,\mathrm{m/s}$ abzubremsen?
   (c) In welcher Entfernung von der Raumstation muß angefangen werden zu bremsen, wenn das Versorgungsschiff aus Sicherheitsgründen bereits auf den letzten 100 m mit der Ankoppelgeschwindigkeit fliegen soll?

6. Mit dem Start der kleinen Asteroidensonde *Deep Space 1* hat die NASA gewissermaßen das neue Jahrtausend eingeläutet. Wesentliche Neuerung ist der Ionenantrieb, der mit dieser Mission zum erstenmal direkt

im Weltraum getestet wird.
Zwar ist die Schubkraft mit $F = 92\,\mathrm{mN}$ gering, verglichen mit herkömmlichen chemischen Antrieben, dafür kann das neue Triebwerk aber viele Tage lang arbeiten. Beim Ionentriebwerk werden Ionen elektrostatisch beschleunigt und ausgestoßen, der Rückstoß treibt dann wie die Verbrennungsgase bei einem herkömmlichen Triebwerk seinerseits die Sonde an.
Die Masse der Raumsonde beträgt 489,5 kg, zuzüglich weiteren 81,5 kg Xenon als Treibstoff. Die gesamte Geschwindigkeitsänderung, die die Sonde damit erreichen kann beträgt $\Delta v = 3{,}6\,\mathrm{km/s}$. Das wäre mit einer so geringen Masse chemischen Treibstoffs unmöglich.
   (a) Berechnen Sie die Beschleunigung, die die Sonde bei maximaler Schubkraft erreicht. (Berücksichtigen Sie näherungsweise bei der zu beschleunigenden Gesamtmasse die zusätzliche Treibstoffmasse zur Hälfte).
   (b) Wie lang kann das Triebwerk auf Grund obiger Angaben arbeiten?
   (c) Wie groß ist der sekündliche Massenausstoß und wie groß ist die Geschwindigkeit, mit der die Xenonionen ausgestoßen werden?

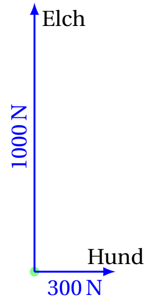
4.3 Kräfte sind Vektoren

Wenn an einem Körper mehrere Kräfte wirken, dann tun sie dies oft in verschiedene Richtungen. Greifen Sie an ein und demselben Punkt an, so fühlt der Körper nicht mehrere verschiedene Kräfte, die ihn zerreißen, sondern eine Gesamtkraft, die mit einer bestimmten Stärke in eine bestimmte Richtung zieht. Diese Gesamtkraft nennt man *Resultierende* und man bekommt sie durch Vektoraddition.

Wie weiter oben schon erwähnt, hat Newton es als selbstverständlich erachtet, dass Kräfte sich wie Vektoren verhalten. Die meisten Anfänger haben aber große Probleme damit, dieses *Superpositionsprinzip* konsequent zu befolgen, weshalb wir das Thema ausführlich behandeln, obwohl bei Lage und Geschwindigkeit im Grunde schon alles über Vektoren gesagt wurde.

4.3.1 Einleitendes Beispiel

An einem Schlitten sind zwei Seile am gleichen Punkt befestigt. Am einen zieht ein Elch 1000 N stark nach Norden und am anderen ein Hund 300 N stark nach Osten. Wie stark ist die Resultierende und in welche Richtung wird der Schlitten gezogen?

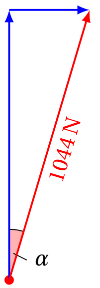


Der dicke Punkt ist der gemeinsame Angriffspunkt beider Kräfte und steht somit für den Schlitten. Der lange Pfeil bedeutet *nicht*, dass der Elch an einer längeren Leine zieht, sondern dass er stärker zieht.
Der Maßstab auf dem Papier ist beliebig, wenn man die Rechnung im Griff hat. Hier gilt $1000\,\mathrm{N} \mapsto 40\,\mathrm{mm}$ und $300\,\mathrm{N} \mapsto 12\,\mathrm{mm}$, weil

$$\frac{1000}{300} = \frac{10}{3} = \frac{40}{12}$$

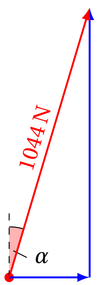
Ein Bild wie dieses nennen wir *Situationsbild*; die Resultierende kann man hier noch nicht erkennen.

Erfreulicherweise bekommt man die Resultierende einfach durch Aneinanderlegen der beiden Kraftpfeile (die man dabei natürlich auf keinen Fall irgendwie drehen darf). Weil wir jetzt die Wirklichkeit mit dem Schlitten verlassen und in eine abstraktere Welt eintauchen, in der wir mit den Pfeilen etwas anderes tun als sie nur anzusehen, nennen wir das folgende ein *Rechenbild*.



Der Ergebnispfeil (die Resultierende) fängt beim Fuß des ersten Kraftpfeils an und endet bei der Spitze des letzten Kraftpfeils. Der Schlitten wird also nicht 1300 N stark gezogen, sondern nur ca. 1044 N. die Bewegungsrichtung ist $\alpha = 16{,}7°$ Abweichung nach Osten (von Norden aus gemessen).
Beachten Sie, dass der dicke Punkt jetzt nicht mehr *Schlitten* bedeutet, sondern *Startpunkt der Vektoraddition*; er ist deshalb in einer anderen Farbe gezeichnet.

Nun könnte man auf die Frage kommen, welcher von den beiden Pfeilen der erste und welcher der letzte ist. Aber das ist egal! Fängt man andersherum an, so kommt doch das gleiche heraus, wie das folgende Bild zeigt.



Der resultierende Kraftpfeil ist der gleiche, sowohl was die Stärke (Länge) als auch was die Richtung angeht. (Vielleicht hat man hier nicht das Bedürfnis, den Winkel von Norden aus anzugeben, aber das ist ohnehin Geschmackssache.)
Beachten Sie: Obwohl von den Kräften nicht einfach die Werte zusammen gezählt werden, nennt man diese Operation Kräfte*addition*. Auch hier gilt aber bemerkenswerterweise das Kommutativgesetz.

Spätestens ab der 10. Klasse muss man diese Pfeiladditionen übrigens nicht

mehr als säuberliche Zeichnung durchführen. Eine grobe Skizze reicht dann, weil man alles viel genauer berechnen kann.

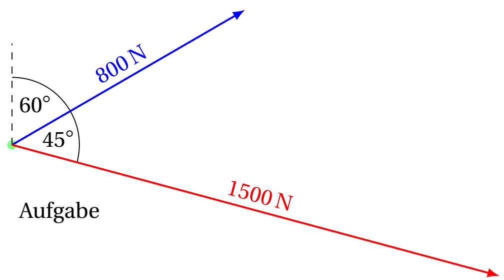
Fazit: Statt Elch und Hund könnte man auch jemanden 1044 N stark 16,7° nach Nord-Osten ziehen lassen. Der Schlitten würde den Unterschied nicht merken.

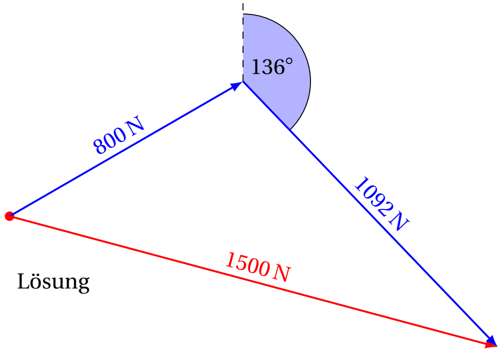
Mehr gibt es dazu eigentlich nicht zu sagen. Die Aufgaben in diesem Themenbereich klingen aber immer unterschiedlich und viele Schüler können den einfachen Zusammenhang der Regeln dann nicht mehr erkennen. Es gibt folgende unterschiedlich anmutende Aufgabentypen.

4.3.2 Aufgabentyp: Resultierende gegeben

Die Gleichung $1 + 2 = x$ scheint einfacher als $1 + x = 3$. Ebenso verhält es sich bei einer Pfeiladdition, bei der der „Ergebnispfeil“ gegeben und stattdessen ein beteiligter Pfeil gesucht ist.

Gegeben sei die Richtung einer Kraft von 800 N. welche zweite Kraft muss am gleichen Angriffspunkt in welche Richtung ziehen, damit die Gesamtkraft 1500 N stark in eine andere gewünschte Richtung zieht? Finde die Stärke der Kraft (man nennt das auch den Betrag) und gib ihre Richtung von Norden aus gemessen an.

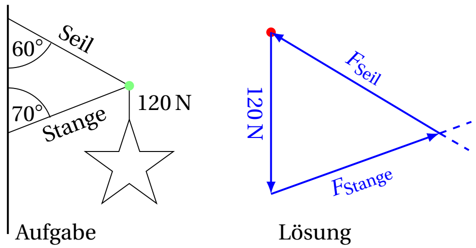




4.3.3 Aufgabentyp: Richtungen gegeben

Bis jetzt waren immer zwei Kräfte mit ihren Beträgen und Richtungen gegeben. Die dritte Kraft war dann gesucht, Betrag und Richtung. Es gibt aber auch Aufgaben, bei denen nur eine Kraft mit Betrag und Richtung gegeben ist und von den beiden anderen kein Betrag aber jeweils die Richtungen.

Nehmen wir eine Weihnachtsbeleuchtung, die an einer Hauswand hängt. Eine Stange (deren Gewicht wir als 0 annehmen wollen) wird von einem Seil gehalten. Am gleichen (grünen) Angriffspunkt hängt auch der Weihnachtsstern. Sein Gewicht von 120 N zieht den grünen Punkt nach unten. Wie stark wird der Punkt von der Stange gedrückt und vom Seil gezogen? Die Winkel der beiden sind im Bild gegeben.



Da sich hier nichts bewegt, ist die Gesamtkraft 0. Der resultierende Pfeil, den wir bis jetzt immer rot gezeichnet hatten, fängt also beim roten Rechenpunkt an und hört dort auch auf. Er ist so kurz, dass man ihn nicht sehen kann. Die Spitze des letzen Pfeils muss also beim Anfang des ersten Pfeils ankommen. Damit bekommen wir die Längen der beiden anderen Pfeile.

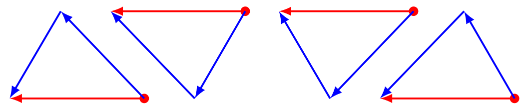
Die Kräfte kann man aus der Zeichnung ablesen oder mit dem Kosinussatz ausrechnen.

4.3.4 Aufgabentyp: Beträge gegeben

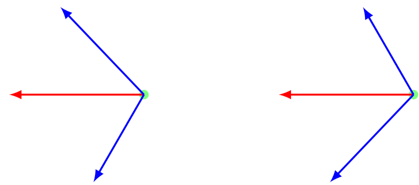
Im letzten Fall ist eine Kraft vollständig und die beiden Teile nur dem Betrag nach gegeben. Die Richtungen sollen gefunden werden.

In welche Richtungen müssen 180 N und 150 N ziehen, damit eine Gesamtkraft von 200 N nach Westen entsteht?

Das folgende Bild zeigt jede der beiden möglichen Lösungen zweimal (nur die Reihenfolge der Pfeile ist vertauscht). Für die zeichnerische Lösung dieser Aufgabe braucht man einen Zirkel, für die rechnerische den Kosinussatz.

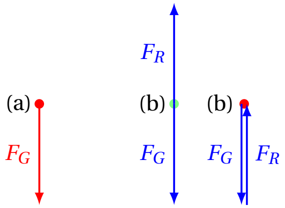


Hier noch die beiden Ergebnisse als Situationsbild.



4.3.5 Beispiel: Fallschirmspringer

Wir untersuchen die Fallbewegung eines Fallschirmspringers, der aus einem schwebenden Hubschrauber springt (mit Flugzeug hätten wir einen waagrechten Wurf). Anfangs (a) führt er eine beschleunigte Bewegung aus (wir nehmen vereinfachend eine konstante Beschleunigung an). Später (b) ist die Luftreibung wegen der hohen Fallgeschwindigkeit so groß, dass er nicht mehr schneller wird. Welche Kräfte wirken in den beiden Fällen? Die Gewichtskraft des Fallschirmspringers nennen wir wieder F_G, die Luft-Reibungskraft F_R.



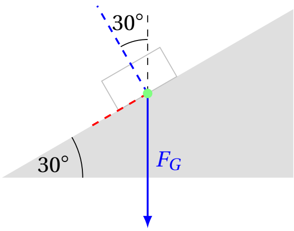
Die Situation (a) ist simpel. Es wirkt nur eine Kraft. Deshalb ist sie auch gleich rot eingezeichnet, weil sie natürlich das Ergebnis ist.

In Situation (b) sind wir sicher, dass sich die beiden Kräfte gegenseitig vernichten! Käme nämlich etwas anderes als 0 heraus, so würde sich die Geschwindigkeit noch ändern, was sie aber nicht mehr tut. Dies ist also wieder ein Beispiel für einen verschwindend kurzen Ergebnispfeil (der im roten Punkt beginnt und endet).

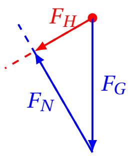
4.3.6 Beispiel: Schiefe Ebene ohne und mit Reibung

Auf einer schiefen Ebene mit 30° Neigung wird ein Klotz losgelassen. Der Klotz rutscht, wie man weiß, beschleunigt den Berg hinab. Aber wie kommt diese beschleunigende „Hangabtriebskraft“ zustande und wie groß ist sie?

Das Gewicht des Klotzes ist interessanterweise nicht wichtig. So, wie alle Gegenstände auf der Erde gleich fallen, so rutschen sie auch gleich. Die Länge des Pfeils F_G für die Gewichtskraft in den folgenden Bildern ist also ganz willkürlich. Sie kann für jedes beliebige Gewicht stehen.



Hier kennt man nur eine beteiligte Kraft vollständig in Betrag und Richtung, die Schwerkraft F_G, die den Klotz nach unten zieht. Von der Resultierenden F_H kennt man nur die Richtung (parallel zum Berg) ebenso von der Normalkraft F_N, mit der der Berg an den Klotz drückt (senkrecht zum Berg).



Eigentlich kann man erst einmal nur die blaue gestrichelte Linie an die Pfeilspitze von F_G legen. Man weiß ja noch nicht, wie lang der Pfeil werden wird. Da aber die rote gestrichelte Linie ihre Spitze am Ende ebenfalls dort haben wird (blau + blau = rot), sind damit beide Pfeilspitzen festgelegt.

Als Erweiterung der Aufgabe herrsche nun zwischen Klotz und Untergrund die Reibungszahl 0,3. Fängt der Klotz zu rutschen an und wenn ja, mit welcher Beschleunigung rutscht er den Berg hinunter?

Um diese Fragen beantworten zu können, müssen wir die Reibungskraft F_R vergleichen mit der „Hangabtriebskraft“ F_H. Die Reibungskraft errechnet sich zu $F_R = 0{,}3 \cdot F_N$, wobei F_N die Andruckskraft des Berges an den Klotz ist (auch Normalkraft genannt). Der Pfeil F_N ist im Bild 1,92 cm lang, also ist die Reibungskraft ein Pfeil der Länge $0{,}3 \cdot 1{,}92\,\text{cm} = 0{,}58\,\text{cm}$, aber bergauf. Um herauszubekommen, wieviel von F_H übrig bleibt, müssen wir nicht schon wieder eine Zeichnung machen. Hier reicht es, die Differenz zu bilden aus dem Pfeil für F_H der Länge 1 cm und dem für F_R der Länge 0,58 cm. Es bleibt ein Pfeil der Länge 0,42 cm Länge den Berg hinab. Da der Pfeil für das Gewicht F_G 2 cm lang ist, entsprechen die 0,42 cm dem Bruchteil 21% der Gewichtskraft. Der Klotz wird also nach Abzug der Reibung noch von 21% seiner Gewichtskraft den Hang hinunter getrieben. Daraus ergibt sich eine Beschleunigung von $0{,}21 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, also etwa ein Fünftel der Erdbeschleunigung. Ohne Reibung wäre es immerhin die Hälfte der Erdbeschleunigung gewesen (F_H ist halb so lang wie F_G).

5 Arbeit und Energie

5.1 Definitionen

Kämpft man eine Strecke s weit gegen eine Kraft F an, so hat man im physikalischen Sinne *Arbeit* verrichtet:

$$W = F \cdot s.$$

Es reicht nicht, Kraft auszuüben, nein, es muss auch ein Weg zurück gelegt werden! Die Einheit der Arbeit ist offensichtlich $1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m}$, was verkürzt als $1\,\mathrm{J}$ (Joule) angegeben wird.

Arbeit kann gespeichert werden, wie wir weiter unten noch feststellen werden, dann nennt man sie Energie.

Gespeicherte Arbeit nennt man Energie.

Den Begriff *Energie* hört man an vielen Stellen des täglichen Lebens. Gehen Sie davon aus, dass die meisten Leute keine klare Vorstellung davon haben, was er bedeutet. Die Selbstverständlichkeit, mit der Politiker und Journalisten davon reden, steht in keinem Zusammenhang mit der Tiefe ihres Verständnisses. Doch bleiben wir erst mal bei der *Arbeit*.

5.2 Beispiele für Arbeit

5.2.1 Allgemein

Immer gilt definitionsgemäß $W = F \cdot s$. Diese Formel kann man nach ein bisschen Nachdenken meist sofort anwenden. Etwa beim Heben eines Körpers der Masse m. Da kämpft man gegen die Schwerkraft $F_G = m \cdot g$ an mit $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Die zurückgelegte Strecke ist hier natürlich die Höhe h. Kein Wunder also, dass man in Formelsammlungen liest $W = m \cdot g \cdot h$.

5.2.2 Reibungsarbeit

Schiebt man eine Kiste 2,5 m weit und strengt sich dabei 32 N stark an, so hat man 80 J gearbeitet, denn

$$W = F \cdot s = 32\,\mathrm{N} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} = 80\,\mathrm{J}.$$

Das Gewicht der Kiste ist natürlich während des Schiebens völlig egal, es wird ja vom Boden genullt.

- Es gibt noch ein Detail, das das Ergebnis nicht beeinflusst, ohne das Sie aber nicht glücklich sein werden, wenn Sie Physik verstehen. Die Kiste steht nämlich vorher still und muss erst mal auf Geschwindigkeit gebracht werden. Das macht aber wegen der Trägheit der Kiste sogar dann Arbeit, wenn überhaupt keine Reibung vorhanden ist. Wieso muss das nicht zu den 80 J addiert werden? Weil die letzten Zentimeter nicht mehr geschoben werden muss. Die Trägheit der Kiste sorgt dafür, dass sie sie – langsamer werdend – alleine zurücklegt. Die anfängliche Mehrarbeit wird am Ende also eingespart. Die 80 J sind also richtig.
- In manchen Aufgaben ist die Reibungskraft nicht gegeben. Man kann sie dann aus dem Gewicht errechnen, wenn man die die Umrechnungszahl μ kennt. Die gibt an, wie aus den vorgegebenen Materialien von Boden und Kiste die Andruckskraft (Gewicht) in Reibungskraft umzurechnen ist. Das ist nicht wirklich wichtig, aber vielleicht stoßen Sie ja mal drauf. Wenn also $\mu = 0{,}16$ gegeben ist, weil der Boden ziemlich glatt ist und das Gewicht der Kiste beträgt 200 N, so bekommen wir die Reibungskraft $F_R = \mu \cdot F_G = 0{,}16 \cdot 200\,\mathrm{N} = 32\,\mathrm{N}$ aus dem Gewicht der Kiste. Woher hat man μ? Aus Tabellen, die Leute erstellen, indem Sie verschiedene Kisten über verschiedene Böden schleppen.

5.2.3 Beschleunigungsarbeit

Wie im vorigen Punkt schon besprochen, macht die Beschleunigung eines Körpers auch ohne Reibung alleine wegen der Trägheit des Körpers schon Arbeit. Einem Körper der Masse m die Beschleunigung a zu verpassen, benötigt die Kraft $F = m \cdot a$. Tut man dies entlang der Strecke s, so arbeitet man

$$W = m \cdot a \cdot s.$$

In den meisten Aufgaben sind aber nicht Strecke und Beschleunigung gegeben, sondern Anfangs- und Endgeschwindigkeit. Dann gilt

$$W = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right).$$

Um das einzusehen, erinnern Sie sich bitte an die Formel $2as = v_2^2 - v_1^2$, die Sie beim Thema *beschleunigte Bewegung* schon eingesehen haben. Durch 2 geteilt und in $W = mas$ eingesetzt ergibt das Gewünschte.

Wird also ein Auto der Masse 1500 kg von 36 km/h auf 72 km/h beschleunigt, so braucht man dafür $W = \frac{1500\,\mathrm{kg}}{2} \cdot \left(400\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} - 100\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\right) = 225\,\mathrm{kJ}$. Aus dem Stillstand auf 36 km/h beschleunigen kostet nur 75 kJ.

5.2.4 Spannarbeit

Verformt man einen Gegenstand, so kämpft man gegen eine Kraft an, während man den Verformungsweg zurücklegt, also arbeitet man. Unangenehmerweise ändert sich die Kraft, während man verformt. Die Formel $W = F \cdot s$ anzuwenden, ist also schwierig.

Hat der Körper die seltene Eigenschaft, dass die Gegenkraft schön gleichmäßig größer wird, während man ihn verformt, so gilt die Formel

$$W = \frac{1}{2} D \left(s_2^2 - s_1^2\right).$$

Spiralfedern sind Gegenstände mit dieser freundlichen Eigenschaft. In Aufgaben sind sie deshalb sehr beliebt.

Hierbei ist D die Federhärte, also eine Angabe darüber, wie viel Kraft nötig ist, um die Feder 1 m weit zu verformen. s_1 gibt an, wie weit die Feder schon gedehnt ist, bevor man mit der Dehnarbeit anfängt. s_2 gibt an, wie weit sie am Ende gedehnt ist. Die Herleitung dieser Formel wird hier nicht gegeben. Sie können die Formel also nicht verstehen, sondern im Moment nur glauben und anwenden.

Will man eine Feder der Härte 3,5 N/cm, die schon 0,5 cm gedehnt ist, um weitere 2 cm dehnen, so hat man schließlich eine Arbeit verrichtet von $W = \frac{1}{2} \cdot 350\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \left((0{,}025\,\mathrm{m})^2 - (0{,}005\,\mathrm{m})^2\right) = 0{,}105\,\mathrm{J}$.

5.3 Energie und ihre Erhaltung

Arbeit hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie nicht verloren geht. Diese Aussage ist sehr abstrakt! Es dauert also eine Weile, bis man sie verstanden hat. Außerdem ist sie schwer zu beweisen. Die Gründe, die dafür sprechen, werden wir nicht untersuchen. Trotzdem empfindet man nach einer Weile den Erhaltungssatz als sehr vernünftig. Diesen Zustand streben wir an.

Der *Energieerhaltungssatz* sagt, dass jede verrichtete Arbeit danach irgendwo gespeichert ist und deshalb nicht verloren geht. Er sagt sogar, dass die jetzt verrichtete Arbeit nicht jetzt frisch erzeugt wird, sondern vorher irgendwo gespeichert war und sich jetzt gerade als Arbeit zeigt.

Arbeit kann also in mehreren Formen gespeichert sein (Energie) und von der einen in die andere wechseln (Arbeitsvorgang). Arbeit betrachtet man als gespeichert, wenn es eine Möglichkeit gibt, den Speicher Arbeit verrichten zu lassen.

Höhenenergie: Wurde ein Körper hochgehoben, also an ihm Hubarbeit verrichtet, so kann dieser Körper beim Runterfallen einen anderen Körper hochheben (mit Hilfe einer Umlenkrolle) oder selber schneller werden oder beides. Man kann also sagen, der Körper habe im hochgehobenen Zustand eine Energie, die er unten nicht hatte. Diese Höhenenergie ist eine Form von potentieller Energie.

Bewegungsenergie: Hat ein Körper eine Geschwindigkeit, so kann er wegen seiner Trägheit einen anderen Körper beschleunigen (z. B. durch Stoß) oder mit Hilfe einer Umlenkrolle hochheben. Dabei wird er selber langsamer. Man sagt deshalb, der sich bewegende Körper habe eine Bewegungsenergie oder kinetische Energie.

Spannenergie: In einer gespannten Feder ist Energie gespeichert, weil die Feder Arbeit verrichten kann. Diese Energie ist ebenfalls eine Form von potentieller Energie.

Wärme: Reibungsarbeit wird in Form von Wärme gespeichert. Durch die Reibung werden die Atome der reibenden Körper angestoßen, wodurch die Atome schneller und mit größerer Auslenkung hin und her schwingen (Wärmeausdehnung). Es liegt also eine Mischung aus potentieller und kinetischer Energie vor.

Wärme ist eine technisch wenig beliebte Energieform, weil man das unordentliche Gezappel nur schwer wieder zu geordneter Bewegung machen kann. Es ist nicht leicht, durch Abkühlung eines Körpers einen anderen Körper zu beschleunigen oder zu heben. Hingegen ist es sehr leicht, Wärme aus den anderen Energieformen zu erzeugen.

Lässt man etwa einen vorher hochgehobenen Körper fallen, so hat sich seine ganze Höhenenergie kurz vor dem Aufprall in Bewegungsenergie umgewandelt. Gleich nach dem Aufprall ist die aber scheinbar verschwunden. Sie hat sich verteilt auf eine riesige Anzahl von atomaren Schwingungen. Viel Boden wird ein klein bisschen an Temperatur gewinnen und diese bald an die Umgebungsluft abgeben, wodurch man den Eindruck gewinnt, die Energie sei verloren. Sie ist aber nicht verloren, sondern nur in großer Unordnung und somit unbrauchbar.

Innere Energie: Die am wenigsten anschauliche Form von Energie ist die innere Energie, die in chemischen Bindungen gespeichert ist. Am besten stellt man sich die Stoffe, aus denen die Körper bestehen, als eine Ansammlung vieler gespannter Federn vor. Da gibt es dann Stoffe, wo die Federn nicht stark gespannt sind (z. B. Mineralien) und solche, wo sie stark gespannt sind (z. B. Schokolade). Bei Verbrennungsvorgängen werden diese Federn dann losgelassen und können durch raffinierte biochemische Vorgänge so genutzt werden, wie wenn es eine große gespannte Feder gewesen wäre. (Ein großer Teil der inneren Energie wird dabei zu Wärme. Verloren geht aber nichts!)

5.4 Anwendung des Energieerhaltungssatzes

5.4.1 Waagrechte, reibungsfreie Bewegung

Ein Körper der Masse $m = 30\,\mathrm{kg}$ soll reibungsfrei waagrecht um $s = 5\,\mathrm{m}$ nach rechts bewegt werden. Das macht keine Arbeit, weil man nicht gegen eine Kraft ankämpfen muss!

$$W = 0$$

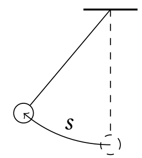
Natürlich muss ein bisschen gearbeitet werden, um den Körper aus der Ruhe heraus in Bewegung zu versetzen. Das könnte eine gespannte Feder tun, die sich beim Beschleunigen des Körpers entspannt und ihre Energie abgibt.

Wenn der Körper dann rechts angekommen ist, kann sein Schwung dazu benutzt werden, um die Feder wieder zu spannen. Der Körper wird dabei langsamer und seine Bewegungsenergie geht zurück in die Feder, die dann wieder gespannt ist. Dieses Beispiel ist sehr wichtig! Waagrechte Bewegung ohne Reibung kostet keine Arbeit!

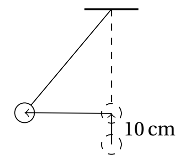
5.4.2 Pendel

Es soll die Arbeit bestimmt werden, die man braucht, um ein Pendel der Masse $m = 100\,\mathrm{g}$ und der Fadenlänge $30\,\mathrm{cm}$ so weit auszulenken, dass es $10\,\mathrm{cm}$ Höhe gewinnt.

Der Weg, den der Pendelkörper während der Auslenkung zurücklegt, ist ziemlich problemlos berechenbar ($s = 25{,}2\,\mathrm{cm}$). Schwierig wird die Sache dadurch, dass sich während der Auslenkung die Kraft ändert. Man kann also nicht einfach $W = F \cdot s$ verwenden.



Stattdessen tut man einfach so, als hätte man den Pendelkörper um $10\,\mathrm{cm}$ gehoben und dann waagrecht an seine Endposition gebracht. Bei der Hebung kämpft man gegen die Gewichtskraft an, während man die Höhe zurücklegt. Für die waagrechte Bewegung ist keine weitere Arbeit nötig.



Warum soll man nun glauben, dass bei der simplen zweiten Rechnung das gleiche heraus kommt, wie bei der viel schwierigeren ersten?

Dazu stellen wir uns zwei Leute vor. Der eine lenkt das Pendel so aus, wie im ersten Bild, der andere tut das wie im zweiten Bild. Kann es sein, dass einer von beiden mehr arbeiten muss als der andere?

Vorstellbar ist das schon. Weil aber der Energieerhaltungssatz gilt, müsste diese Mehrarbeit irgendwo gespeichert sein. In einer der beiden Welten müsste sich etwas bewegen oder wärmer geworden sein oder gespannt worden sein. Das ist nicht der Fall. In beiden Fällen liegt der gleiche Anfangszustand vor und der gleiche Endzustand.

Weil der Energieerhaltungssatz gilt, darf man sich also bei schwierigen Aufgaben immer damit behelfen, leichtere Aufgaben zu bearbeiten, die bezüglich der Energien den gleichen Anfangs- und Endzustand wie die schwierige haben. Das ist so toll, dass man sich anfangs gar nicht traut! Das muss man üben.

Um es am Ende nicht noch zu vergessen, hier also die Lösung der Aufgabe

$$W = mgh = 0{,}1\,\mathrm{kg} \cdot 10\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 0{,}1\,\mathrm{J}.$$

Die Länge des Fadens zusammen mit dem Auslenkungswinkel spielen nur indirekt eine Rolle, indem durch sie die Höhe festgelegt ist. Diese spielt eine sehr wichtige Rolle.

5.5 Aufgaben

1. Ein Gegenstand unbekannter Masse wird mit der Startgeschwindigkeit 12 m/s senkrecht nach oben geworfen. In welcher Höhe hat er die Hälfte der Anfangsgeschwindigkeit? Benutzen Sie den Energieerhaltungssatz. Warum muss man die Masse nicht kennen?

2. Ein Körper von 50 kg verliert reibungsfrei 100 m Höhe.
   (a) Welche Geschwindigkeit und welche kinetische Energie hat er unten, wenn er senkrecht gefallen ist?
   (b) Welche Geschwindigkeit und welche kinetische Energie hat er unten, wenn er stattdessen auf einer 45° geneigten Rutsche reibungsfrei bis unten rutscht?

3. Ein Körper von 5 kg soll in zwei Stufen schneller werden. Zuerst von 10 m/s auf 20 m/s und dann weiter auf 30 m/s. Berechnen Sie, wieviel Arbeit dazu jeweils zu verrichten ist.

4. Ein Zug erreicht mit der Geschwindigkeit 72 km/h den Anfang einer ansteigenden Strecke der Neigung 3°. Der Zug rollt ohne Antrieb dahin, wobei eine Reibungskraft wirkt, die so groß ist wie 0,5% seines Gewichtes. Berechnen Sie die Strecke, die der Zug noch zurücklegen kann, bis er stehen bleibt.

5. Ein Auto hat die Geschwindigkeit 80 km/h. Um wieviel muss die Geschwindigkeit zunehmen, damit sich die kinetische Energie des Autos verdoppelt?

6. Ein Skifahrer der Masse 80 kg durchfährt eine Mulde. Zuerst verliert er 12 m an Höhe, dann gewinnt er wieder 8 m. Vorher und nachher ist er gleich schnell, weil er durch Reibung Energie verliert. Wie groß war die durchschnittliche Reibungskraft, wenn er insgesamt 160 m zurückgelegt hat?

7. Ein Segelflugzeug der Masse 400 kg setzt mit 72 km/h in 110 m Höhe zur Landung an. Während des Landevorgangs verliert es allein durch Luftreibung 65% der anfänglich vorhandenen Gesamtenergie. Nach der Ankunft auf dem Boden kommt das Flugzeug auf Gleitkufen ($\mu = 0{,}32$) auf einer horizontalen Wiese zum Stillstand (Luftreibung spielt hier keine Rolle mehr).
   (a) Wie viel Energie hatte es am Anfang der Geschichte, wieviel beim

   Aufsetzen auf dem Boden?
   (b) Berechnen Sie den Bremsweg.

8. Eine Turnerin der Masse 55 kg lässt sich von einem Balken auf ein Trampolin fallen. Der Höhenunterschied zwischen dem Balken und der anfangs nicht verformten Membran des Trampolins beträgt 0,8 m. Danach wird das Trampolin aber noch um 40 cm eingebeult. (Gehen sie im folgenden davon aus, dass Reibungsvorgänge vernachlässigbar sind und das Trampolin rechnerisch wie eine gewöhnliche Feder behandelt werden kann.)
   (a) Berechnen Sie die Energie, die im Trampolin gespeichert ist, wenn die Turnerin den tiefsten Punkt erreicht hat.
   (b) Berechnen Sie die Federhärte D des Trampolins.
   (c) Berechnen Sie, wie tief die Turnerin einsinkt, wenn sie sich einfach auf das Trampolin stellt (ohne hineinzuspringen).
   (d) Wenn die Turnerin aus der in (a) genannten Lage wieder hochgeschleudert wird, hat sie irgendwo auf dem Weg nach oben eine Höchstgeschwindigkeit. Begründen Sie, warum das genau an der Stelle ist, die Sie in (c) ausgerechnet haben. Berechnen Sie diese Höchstgeschwindigkeit.

6 Zentraler Stoß

Dieses Kapitel behandelt das Aufeinanderprallen von zwei Körpern, die sich vor dem Stoß auf einer Linie bewegt haben (in gleicher oder entgegengesetzter Richtung).

Diese Einschränkung ist völlig willkürlich, aber der Lehrplan sieht es so vor und die zur Verfügung stehende Zeit ist in der Tat begrenzt. Wir werden also in der 11. Klasse nicht die Tatsache behandeln, dass der Impuls eine vektorielle Größe ist, sondern nur zwei Richtungen unterscheiden: *Rückwärts* wird sich von *Vorwärts* einfach durch ein negatives Vorzeichen unterscheiden.

Wenn Sie an Billardkugeln denken, werden wir also nur solche Fälle untersuchen, wo die Kugeln nach dem Zusammenprall nicht nach links und rechts davon sausen, sondern in der ursprünglichen Richtung bleiben.

Das Kapitel ist nicht sehr schwer und physikalisch nicht besonders wichtig. Sein Wert liegt in der einfachen Klarheit des Themas, mit dem man mathematisches Denken sauber nachvollziehen kann.

6.1 Elastisch oder unelastisch

Um die auftretenden Fälle mathematisch vollständig in den Griff zu bekommen, müssen wir uns noch weiter einschränken. Wenn zwei Körper aneinander stoßen, gelten zwar Impuls- und Energieerhaltungssatz (wie immer). Aber die Energie muss nach dem Stoß nicht wieder vollständig als Bewegungsenergie vorliegen. Ein Teil der Bewegungsenergie von vor dem Stoß kann nämlich beim Kneten der Körper zu Wärme werden, und üblicherweise hat man keine Ahnung, wieviel das ist[1].

Wegen dieser Schwierigkeiten beschränken wir uns auf die beiden folgenden Fälle:

- Der Stoß erfolgt vollkommen *unelastisch*, d.h. die beiden Körper kleben nachher aneinander, bilden sozusagen einen Gesamtkörper. Wie viel Bewegungsenergie dabei zu Wärme wird, werden wir in Kürze sehen.

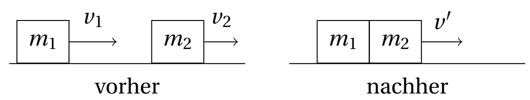
[1] Da müsste man ja vorher und nachher die Temperaturen der Stoßpartner messen. Das ist sehr schwierig, weil die Temperaturerhöhung nur sehr gering ist und die Wärme auch sehr schnell an die Umgebungsluft abgegeben wird.

- Oder der Stoß erfolgt vollkommen *elastisch* und überhaupt keine Bewegungsenergie wird zu Wärme (kein inneres Kneten tritt auf).

Über die Sinnhaftigkeit der beiden Begriffe könnte man streiten, aber wir haben Besseres zu tun.

6.2 Der unelastische Stoß

In diesem einfacheren Fall stoßen zwei Körper zentral aufeinander und bleiben dann zusammen, z. B. weil sie sich ineinander verhaken. Am Ende haben sie jedenfalls die gleiche Geschwindigkeit.



Das Bild zeigt eine Situation, in der der linke Körper den rechten einholt. Hätten sie sich aufeinander zu bewegt, würde die folgende Herleitung nicht anders aussehen, lediglich manche Geschwindigkeiten hätten negative Werte.

Diesen Fall hätten Sie selber schon im Kapitel über Impulserhaltung herleiten können, weil Impulserhaltung allein schon ausreicht, um zu einem Ergebnis zu gelangen. Es gilt

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = p = p' = m_1 v' + m_2 v'$$

Nun kann man auf der rechten Seite v' ausklammern und danach auflösen

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{6.1}$$

Beim Verhaken der beiden Körper knirscht es in der Knautschzone und ein Teil der Bewegungsenergie wird zu Wärme, aber wieviel? Ganz einfach: Es muss der Unterschied zwischen der kinetischen Energie nachher und derjenigen vorher sein, denn der Energieerhaltungssatz gilt ja auch.

$$\textit{Wärme} = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v'^2. \tag{6.2}$$

6.3 Der elastische Stoß

In diesem Fall stoßen zwei Körper zentral aufeinander und prallen dann voneinander ab. Beim Stoß wird Bewegungsenergie kurzzeitig in Spannenergie umgewandelt, aber diese wird danach wieder vollständig zu Bewegungsenergie. In Wirklichkeit ist das nur annähernd möglich.

vorher nachher

Dieser Fall ist mathematisch etwas anspruchsvoller. Der Impulserhaltungssatz allein führt zu keinem eindeutigen Ergebnis, weil ja der anfangs vorhandene Gesamtimpuls nach dem Stoß auf viele Weisen auf die zwei Körper aufgeteilt werden könnte. Nur weil auch die Energie erhalten bleiben muss, bekommt man ein eindeutiges Ergebnis, aber man muss halt auch mit beiden Gleichungen arbeiten:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{aligned}$$

Das sind zwei Gleichungen für zwei Unbekannte (normalerweise v_1' und v_2'). Nun kann man die erste Gleichung nach z.B. v_2' auflösen und in die zweite einsetzen. Nach ein paar Schritten der Vereinfachung erhält man

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} \tag{6.3}$$

Bitte rechnen Sie das selbständig nach!

6.4 Aufgaben

1. Ein Eisenbahnwaggon der Masse 22 t fährt mit 2 m/s auf einen anderen Waggon der Masse 32 t zu, der ihm mit 0,5 m/s entgegenrollt. Beim Zusammenstoß schnappen die Kupplungen zu und die beiden bilden einen Zug. Welche Geschwindigkeit hat dieser?

2. Wenn Sie m_1 mal die Note v_1 und m_2 mal die Note v_2 bekommen haben, wie rechnen Sie dann die Durchschnittsnote v' aus? Finden Sie eine Seelenverwandschaft zwischen Noten und zentralen Stößen!

3. Berechnen Sie den Bruchteil der Bewegungsenergie, der sich in Wärme verwandelt bei einem unelastischen Stoß zwischen zwei gleich großen Massen, von denen eine vor dem Stoß ruht.

4. Sehr oft hat man Situationen, in denen eine der Massen viel (!) größer ist als die andere, sagen wir $m_2 \gg m_1$. Wie kann man die Formeln für den unelastischen und den elastischen Stoß dann vereinfachen? Stimmen die Ergebnisse mit Ihrem Gefühl überein?
   Tip: $m_1 + m_2 \approx m_2$, $m_1 - m_2 \approx -m_2$, $m_2 - m_1 \approx m_2$.

5. Ein Lastwagen von 35 t Masse fährt mit 50 km/h auf mich zu. Ich werfe ihm einen Tennisball mit der Geschwindigkeit 30 m/s entgegen (und bringe mich dann in Sicherheit). Dieser prallt elastisch ab. Welche Geschwindigkeit haben Lastwagen und Tennisball nachher?

6. Die Stoßkugel[2] beim Poolbillard hat 200 g Masse, alle anderen nur 150 g. Die Stoßkugel trifft zentral mit 1,5 m/s auf eine ruhende Kugel. Welche Geschwindigkeiten haben beide nachher? Was passiert, wenn man statt der Stoßkugel eine weitere normale Kugel nimmt?

[2] Die Kugeln beim Billard nennt der Profi (oder der Macho?) *Bälle*.

7 Kreisbewegung und Zentralkraft

7.1 Fliehkraft, ein Denkfehler

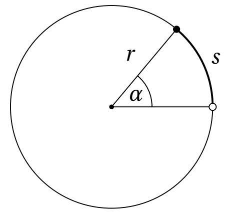
Im Volksmund gibt es die Fliehkraft, weil der Mensch dazu neigt, über seine Vorstellungen zu sprechen, bevor er darüber nachdenkt. Wenn man im Auto sitzt und eine Linkskurve fährt, so drückt der Mensch an die rechte Autotür – der Mensch versucht, aus dem Auto zu fliehen.

Das ist aber eine böse Unterstellung. Der Mensch war ganz einfach auf dem Weg nach vorne, wo das Auto die ganze Zeit hingefahren ist. Jetzt fährt das Auto eine Kurve und der Mensch ist immer noch auf dem Weg nach vorne. Davon bringt ihn das Auto ab, indem es mit der rechten Tür an seine Schulter drückt. Nicht der Mensch ist die Ursache, sondern das Auto. Wegen *actio* = *reactio* fühlt aber natürlich die Autotür die Schulter ebenso stark wie die Schulter die Autotür. Und weil der Mensch die Nerven in der Schulter hat und nicht in der Tür, spricht er von Fliehkraft. Der richtige Begriff heißt *Zentralkraft*, weil die Kraft auf den Menschen zum Zentrum der Kreisbahn hin wirkt.

7.2 Geschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit

Die schönste Kurve ist eine Kreisbahn, weil es da einen festen Radius gibt. Die meisten Kurven sind aber komplizierte Schlangenlinien, die mathematisch vielleicht viel schwieriger zu erfassen sind. Aber das ist ein Irrglaube. Jede noch so komplizierte Schlangenlinie kann man sich aus Kreisstücken mit verschiedenen Radien zusammengesetzt denken und in jedem Kreisstück gilt das Gesetz, das wir noch finden müssen. Zuvor aber ein paar Gedanken zum Thema Geschwindigkeit.

Ein Körper auf einer Kreisbahn braucht für einen bestimmten Winkel α eine bestimmte Zeit t und für eine volle Drehung (Bogenmaß 2π) die volle Umlaufzeit T. Beim Winkel α hat der Körper die Strecke s zurückgelegt, bei der vollen Umdrehung den Umfang $U = 2\pi r$. Es gilt also



$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{s}{t}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω gibt an, um welchen Winkel der Körper in einer bestimmten Zeit weiter kommt. Sie hat also die Einheit $\frac{1}{s}$, weil der Winkel im Bogenmaß keine eigene Einheit hat.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\alpha}{t}.$$

Das alles ist nicht schwer, aber sehr verwirrend, insbesondere, wenn man noch aufschreibt, dass α und s natürlich über r ineinander umgerechnet werden können. Es gilt offensichtlich

$$s = \alpha \cdot r \quad \text{und} \quad v = \omega \cdot r.$$

Und das war noch kein bisschen Physik, sondern nur elementare Geometrie. Die Aufgaben am Ende des Kapitels tragen hoffentlich zur Festigung der Begriffe bei.

7.3 Die Zentralkraft

7.3.1 Eigene Erfahrungen

Es kann nicht schaden, sich vorher zu überlegen, in welchen Situationen man viel und in welchen man wenig Kraft brauchen wird, um einen Körper auf eine Kreisbahn zu bringen. Als Körper nehmen wir ein Kind, das wir an den Armen halten und im Kreis herumfliegen lassen. Kinder mögen sowas.

Wovon hängt es nun ab, ob man stark an den Armen ziehen muss oder schwach?

- Je schneller man sich dreht, desto mehr Kraft braucht man.
- Je mehr Masse das Kind hat, desto mehr Kraft braucht man.
- Der Radius spielt auch eine Rolle. Wenn man das Kind an ein Seil bände, könnte man es auf einem Kreis mit großem Radius fliegen lassen. Ob dazu mehr oder weniger Kraft nötig ist, ist schwer zu sagen.

7.3.2 Herleitung der Formel für die Zentralkraft

Dieser Abschnitt beinhaltet eine ordentliche Menge Mathematik der 11. Klasse und wird Ihnen schwer fallen. Wenn Sie also Schwierigkeiten haben, liegen

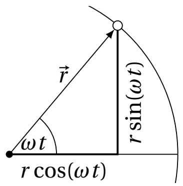
Sie richtig. Wenn die Schwierigkeiten unüberwindbar sind, können Sie das Kapitel auch überspringen.

Der Körper bewege sich gegen den Uhrzeigersinn im Kreis. Wir lassen die Zeit loslaufen ($t = 0$), wenn er bei $\alpha = \omega t = 0$ ist. Die Idee der hier gezeigten Herleitung lautet so:

Wir betrachten die Kreisbewegung als zwei gleichzeitig ablaufende Bewegungen. Eine Auf-ab-Bewegung zusammen mit einer Links-rechts-Bewegung. Die Beschleunigung bekommt man – wie immer – als die zweite Ableitung der Ortsfunktionen[1].

Die Formel, die am Ende rauskommt, stimmt auch dann, wenn Sie das jetzt nicht verstehen. Nicht verzagen, das hier ist für die 11. Klasse recht formalistisch und unanschaulich.

Wenn wir die Kreisbewegung als eine Zusammensetzung aus einer waagrechten und einer senkrechten Bewegung betrachten, so gilt für x und y in Abhängigkeit von der Zeit t



$$x = r \cdot \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin(\omega t).$$

Die Geschwindigkeiten in x- und y-Richtung bekommt man durch die erste Ableitung nach der Zeit

$$\dot{x} = -\omega r \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad \dot{y} = \omega r \cos(\omega t).$$

Ein zweites Mal abgeleitet bekommt man dann die Beschleunigungen

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 r \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad \ddot{y}(t) = -\omega^2 r \sin(\omega t).$$

Das sind aber gerade $-\omega^2$ mal die Werte für x und y, d. h. es gilt

$$\text{Beschleunigungsvektor} = -\omega^2 \cdot \text{Ortsvektor}.$$

Betrachtet man also x und y zusammen als Vektor $\vec{r}$ vom Kreismittelpunkt zum Körper, so zeigen $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ zusammen als Vektor $\vec{a}$ betrachtet vom Körper zum Mittelpunkt hin, weil

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

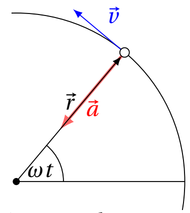
Durch Multiplikation der Beschleunigung mit der Masse erhält man endlich die Kraft $\vec{F} = -m\omega^2 \cdot \vec{r}$. Da wir uns die Richtung selber merken können, reicht

[1] Die Ableitungen nach der Zeit notieren wir wieder mit einem Punkt. So, wie $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$, schreiben wir also $\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$.

uns der Betrag der Kraft

$$\boxed{F = m \cdot \omega^2 \cdot r}$$

Das Bild zeigt nochmal die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{a}$, sowie $\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$, der ebenfalls genau in die Richtung zeigt, die man erwarten würde.



Bleibt noch anzumerken, dass die Formel manchmal in einem anderen Gewand auftritt. Verwendet man nämlich statt der Winkelgeschwindigkeit ω die Bahngeschwindigkeit $v = \omega \cdot r$, so erhält man

$$\boxed{F = \frac{mv^2}{r}}$$

Teilt man die Kraft durch die Masse, erhält man den Betrag der Beschleunigung.

$$\boxed{a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}}$$

7.3.3 Versuch zur Überprüfung der Gesetze

Die ganzen Gesetze konnten wir allein durch Nachdenken finden – der Theoretische Physiker ist glücklich. Trotzdem kann es nicht schaden, das ganze auch mit einem Versuch zu überprüfen.

Identifizieren Sie die Bestandteile des Versuches

- Elektromotor mit Drehzahlregler
- Metallschiene mit zwei Gewichten zum Ausgleich der Unwucht. Auf einem von beiden gibt es eine kleine Metallstange, auf der eine kleine Masse m rutschen kann.
- Empfindlicher Spiegel in der Mitte der Metallschiene. Der Spiegel neigt sich umso stärker, je stärker man an seinem Zipfelchen zieht. Ziehen Sie vorsichtig daran.
- Ein Strohhalm ist mit einem Ende am Zipfelchen des Spiegels befestigt und mit dem anderen am rutschenden m. Bei Drehung ist es der Spiegel, der mit Hilfe des Strohhalmes die Masse m auf die Kreisbahn zwingt. Je mehr Kraft dafür nötig ist, desto stärker neigt sich der Spiegel. Es gibt Strohhalme in mehreren Längen.

- Wie stark sich der Spiegel neigt, wird mit einem Laser sichtbar gemacht. Schießen Sie mit dem Laser so auf den Spiegel, dass der reflektierte Strahl an der Wand sichtbar ist. Wenn sich die Schiene dreht, wird der Laser an der Wand ein Strich.
  Achtung: Passen sie auf, dass kein Laserlicht in Ihre Augen gelangt. Der Laser ist zwar schwach genug, aber es wäre ein unschönes Erlebnis.

Messungen

- Markieren Sie die Höhe an der Wand, die der Laser anstrahlt, wenn sich die Schiene nicht dreht.
- Finden Sie ein Verfahren zur Geschwindigkeitsmessung der Masse m und stellen Sie irgendeine Geschwindigkeit ein. Legen Sie die Nulllinie des Lasers fest.
- Welche Auslenkungen müsste der Laser der Formel nach zeigen, wenn die Masse verdoppelt oder der Radius halbiert oder die Geschwindigkeit halbiert wird? Prüfen Sie Ihre Ideen, indem Sie geeignete Versuche durchführen. Achtung: Das Spiegelchen und die Augen sind empfindlich!

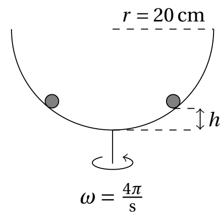
7.4 Aufgaben

1. Die Erde hat am Äquator einen Umfang von 40000 km und dreht sich einmal pro Tag ganz herum. Wir betrachten einen Körper, der am Äquator still steht.
   (a) Welche Strecke legt er allein auf Grund der Drehung in einer Stunde zurück?
   (b) Berechnen Sie T (in Sekunden).
   (c) Berechnen Sie seine Winkelgeschwindigkeit und seine Geschwindigkeit.
   (d) Wie lang braucht er für 100 km, wie lang für 5°, wie lang für den Bogen 1,5?

2. Ein Karussel, dessen Sitze sich (während es fährt) in 3 m Abstand von der Drehachse befinden, dreht sich in einer Minute 4,5 mal.
   (a) Wie groß sind v, ω und T? Um welchen Winkel und um welche Strecke ist man nach 3 Minuten weiter?
   (b) Wie lang braucht es für eine Vierteldrehung?

   (c) Wenn das Karussel steht, hängen die Sitze an Ketten genau senkrecht. Um welchen Winkel sind die Ketten nach außen geneigt, wenn es sich dreht? (Genaue Kräfteanalyse!)

3. Ein halbkreisförmiges Profil rotiert so, dass sein Rand die Form einer Schüssel abfährt. Im Profil liegen zwei Kugeln unterschiedlicher Masse, die durch die Rotation hoch steigen.
   Erklären Sie das Zusammenspiel von Schwerkraft, Normalkraft und Zentralkraft. Stellen Sie eine Formel auf für die Höhe der Kugeln.
   Betrachten Sie die Kugeln als Punkte. Wenn Sie denken, die Masse kennen zu müssen, nehmen Sie irgendeinen Wert an.



4. Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit aller drei Zeiger einer Uhr. Wie lang muss der Stundenzeiger sein, damit sein äußerster Punkt die gleiche Geschwindigkeit hat wie der Sekundenzeiger einer Armbanduhr der Länge 2 cm?

5. Die Trommel einer Waschmaschine hat einen Radius von 25 cm und dreht sich 1000 mal pro Minute.
   (a) Berechnen Sie die Zentralkraft auf ein Tuch von 20 g Masse, das allein und völlig entfaltet an der Trommel klebt. Wie groß ist der Druck, wenn es 9 dm^2 groß ist?
   (b) Berechnen Sie das Verhältnis von Zentral- zu Gewichtskraft.
   (c) Wie stark ist die Kraft auf die Socke am höchsten und am tiefsten Punkt? (Die Trommel stehe senkrecht.)

6. Welche Winkelgeschwindigkeit müsste die Erde haben, damit ein Körper am Äquator schwerelos wäre. Wie lang würde dann ein Tag dauern?

7. Auf dem obersten Punkt einer auf dem Boden liegenden Halbkugel von 1 m Radius liegt ein Geldstück, das gerade anfängt, reibungsfrei herunter zu rutschen. (Anfangsgeschwindigkeit annähernd 0.) In welcher Höhe über dem Boden verliert es den Kontakt zur Halbkugel?