Lösungen

1. (a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(3x^2-2x) = \cos(3x^2-2x)\cdot(6x-2)$

   (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+1)^{-3}\cdot(x-1) = -3(x+1)^{-2}\cdot(x-1)+(x-1)^{-3}\cdot 1$

   (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{8x}{x^2-6} = \frac{8(x^2-6)-8x(2x)}{(x^2-6)^2} = \frac{-8x^2-48}{(x^2-6)^2}$

   (d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{x^3+x^{-2}} = -\sin(\sqrt{x^3-x^{-2}})\cdot\frac{3x^2-2x^{-3}}{2\sqrt{x^3-x^{-2}}}$

   (e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\cdot(x^3+1)^8 = 2x\cdot(x^3+1)^8+x^2\cdot 8(x^3+1)^7\cdot 3x^2 = 2x(x^3+1)^8+24x^4\cdot(x^3+1)^7$

   (f) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\frac{\sin x}{x^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\cos x\cdot x^2-\sin x\cdot 2x}{x^4} = \sqrt{\frac{x^2}{\sin x}}\cdot\frac{x\cos x-2\sin x}{2x^3}$

2. (a) $x=\overline{AC}$, $f(x)$ = Gesamtfahrzeit in Abhängigkeit von x. $f(x)=1{,}5\cdot x+3\cdot\sqrt{30^2+(50-x)^2}$

   (b)

$$
\begin{aligned}
f'(x)=1{,}5+\frac{3\cdot 2\cdot(50-x)\cdot(-1)}{2\sqrt{3400-100x+x^2}} &\overset{!}{=} 0 \\
t:1{,}5 & \\
1 &= \frac{100-2x}{\sqrt{3400-100x+x^2}} \\
\sqrt{3400-100x+x^2} &\overset{P}{=} 100-2x \qquad |^2 \text{erzeugt evtl. zusätzliche Lösungen!} \\
3400-100x+x^2 &= 10000-400x+4x^2 \\
0 &= 3x^2-300x+6600 \\
0 &= x^2-100x+2200 \\
x_1\approx 32{,}7 \qquad & x_2\approx 67{,}3 \text{ (übersteht die Probe } P \text{ nicht)}
\end{aligned}
$$

   Damit ergibt sich eine Gesamtfahrzeit von $f(x_1)\approx 153\,\text{min}$.

3. (a) $f(x)=\dfrac{4-3x}{(x-1)^2}$, $\quad f'(x)=\dfrac{-3(x-1)^2-(4-3x)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\dfrac{-3(x-1)-(4-3x)\cdot 2}{(x-1)^3}=\dfrac{3x-5}{(x-1)^3}$

   (b) **Definitionsmenge** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, weil bei $x=1$ der Nenner 0 würde.

   Symmetrie $f(2)=-2$, $f(-2)=\frac{10}{9}$
   Da $f(-2)\neq f(2)$, liegt keine Symmetrie zur y-Achse vor. Da $f(-2)\neq -f(2)$ liegt keine Punktsymmetrie zum Ursprung vor. Oder noch kürzer: Die Funktion hat eine Lücke bei $x=1$ aber keine bei $x=-1$, folglich kann keine Standardsymmetrie vorliegen.

   NST f kann nur dort 0 werden, wo der Zähler von f es wird, also $4-3x=0$ oder $x=\frac{4}{3}$. $N_1\left(\frac{4}{3}|0\right)$.

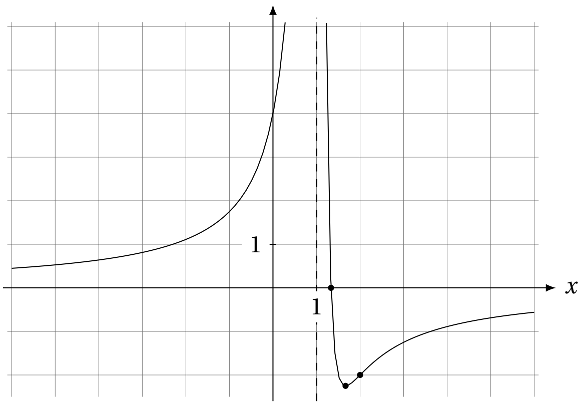
   Limites Bei sehr großen Beträgen von x wächst der Nenner viel stärker (quadratisch), als der Zähler. Deshalb ist $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+0$, weil Zähler und Nenner positiv sind. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-0$, weil der Zähler negativ und der Nenner positiv ist. $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)$, weil in beiden Fällen der Zähler gegen 1 geht und der Nenner gegen +0.

   Extrema Eine überall differenzierbare Funktion kann nur dort ein Extremum haben, wo die erste Ableitung 0 wird, also $f'(x)=0$. Das ist der Fall, wenn der Zähler von f' zu 0 wird, also bei $x=\frac{5}{3}$. Dass es sich nicht nur um eine waagrechte Stelle handelt, testet man mit der zweiten Ableitung:

$$
f''(x)=\frac{3(x-1)^3-(3x-5)\cdot 3\cdot(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{3(x-1)-3(3x-5)}{(x-1)^4}=\frac{-6x+12}{(x-1)^4}
$$

   Es ist $f''\left(\frac{5}{3}\right)=10{,}125>0$. Damit ist $x=\frac{5}{3}$ eine Minimumstelle. Eingesetzt in f bekommt man den Tiefpunkt $T\left(\frac{5}{3}\middle|-\frac{9}{4}\right)$.

   Wendepunkte Ein Wendepunkt kann nur dort liegen, wo die Krümmung, also die zweite Ableitung 0 wird. Das ist der Fall, wenn der Zähler der zweiten Ableitung 0 wird, also bei $x=2$. Damit ist aber noch nicht sicher, dass f'' dort auch einen Vorzeichenwechsel hat. Das sieht man aber leicht ein, denn der Nenner von f'' hat für $x=2$ den Wert 1. Der Zähler von f'' wechselt bei $x=2$ von positiv nach negativ, also auch der ganze Bruch, aus dem f'' besteht. Man hat also eine Links-Rechts-Wendestelle. 2 eingesetzt in f ergibt den Wendepunkt $W(2|-2)$.

Graph 

4. (a) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, weil bei konstantem Zähler und kleiner werdendem Nenner der Bruch immer größer wird. Das geschieht in der Umgebung von $x = 3$ und die Funktion geht von beiden Seiten gegen $+\infty$.

   (b) $g(x) = -\frac{1}{x}$, hier explodiert der Wert des Bruches in der Nähe von $x = 0$. Von links kommend, also für $x < 0$, geht g gegen ∞ von rechts kommend gegen $-\infty$, weil ja dann $x > 0$ ist.

5. In (1) soll mit der Produktregel die erste Ableitung von $f = u \cdot v$ ausgerechnet werden. Die Rechnung ist korrekt, weil $u'v = 3x^2 \cdot \sin(3x)$ und $uv' = x^3 \cdot \cos(3x) \cdot 3$ ist. Die letzte 3 kommt vom Nachdifferenzieren des cos. Der Schüler hat diese 3 aber nicht hinten notiert, sondern vor dem x^2. Das ist nicht falsch.

   In (2) hat er den größt möglichen gemeinsamen Term $3x^2$ ausgeklammert. Die Korrektheit erkennt man sofort, wenn man die äußere Klammer wieder ausmultipliziert und genau die Zeile vorher erhält.