1 Potenzen und Potenzfunktionen

1.1 Bezeichnungen

Def.: $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{\text{n mal}} \quad (a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N})$ insbesondere ist $a^1 = a$

a heißt Grundzahl oder Basis
n heißt Hochzahl oder Exponent
a^n heißt Potenz

$10^2 = 100 \qquad 2^{10} = 1024 \qquad 3^3 = 27 \qquad 3^2 = 9$

$2^3 = 8 \qquad (-2)^3 = -8 \qquad 2^4 = 16 \qquad (-2)^4 = 16$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} \qquad \left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1}{100.000}$

$10^n = 1$ mit n Nullen.
$5 \cdot 10^n = 5$ mit n Nullen.
$(-a)^{\text{gerade}} = a^{\text{gerade}}$.
$(-a)^{\text{ungerade}} = -a^{\text{ungerade}}$.

1.2 Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis

Satz 1: $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (a \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N})$

Bew.: klar

Beachte nun die Bsp.: $\frac{a^{10}}{a^6} = a^4 \qquad \frac{a^6}{a^{10}} = \frac{1}{a^4}$

Satz 2: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N})$

Weil wir nämlich festlegen: $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ und $a^0 = 1$

Dadurch wird z.B. $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3} = a^{-3} = a^{2-5}$ und $\frac{a^5}{a^5} = 1 = a^0 = a^{5-5}$

1.3 Multiplikation und Division bei gleichen Exponenten

Satz 3: $a^n \cdot b^n = (ab)^n \quad (a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N})$

Bew.: $a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{n mal}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{\text{n mal}} = \underbrace{a \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot b}_{\text{n mal}} = (ab)^n$

Satz 4: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; n \in \mathbb{N})$

Bew.: $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{b \cdot b \cdot \dots \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

1.4 Potenzieren von Potenzen

Satz 5: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (a \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N})$

Bew.: $(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{m mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{m mal}} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{m mal}}}_{\text{n mal}} = a^{m \cdot n}$

1.5 Erhaltung der Potenzgesetze für negative, ganze Exponenten

In den fünf Potenzgesetzen waren bisher für m und n keine negativen Exponenten erlaubt. Solche kommen aber z.B. als Ergebnis des 2. Satzes heraus.
Man darf nun alle fünf Gesetze auch mit negativen m und n verwenden: die Ergebnisse bleiben richtig!
Wir zeigen dies nur am Beispiel des 5. Satzes:

Beh.: Für positive, ganze m und n gilt:

$(a^m)^{-n} = a^{-mn} \qquad (a^{-m})^n = a^{-mn} \qquad (a^{-m})^{-n} = a^{mn}$

Bew.: $\left(a^{-m}\right)^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1^n}{a^{mn}} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$ qed.

$\left(a^m\right)^{-n} = \frac{1}{\left(a^m\right)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$ qed.

$\left(a^{-m}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(a^{-m}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn}$ qed.

Das Ganze müßte man nun auch noch für alle möglichen Fälle mit 0 beweisen. Wir lassen das, es stimmt schon

Satz: Für alle $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
5. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

1.6 Zehnerpotenzen

10^n =1 mit n Nullen

$5 \cdot 10^n$ =5 mit n Nullen

10^{-n} =1 an n-ter Stelle nach dem Komma

$5 \cdot 10^{-n}$=5 an n-ter Stelle nach dem Komma

$1{,}097 \cdot 10^2$ =109,7

$1{,}097 \cdot 10^{-2}$=0,01097

1,097 nennt man Mantisse. In der Physik versucht man meist, dass die Mantisse zwischen 1 und 9 liegt.

1.7 Polynomdivision

Def.: Ein Term $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ heißt Polynom n-ten Grades.

	7	Polymnom 0. Grades
Bsp.:	$x+7$	Polymnom 1. Grades
	$3x^2+8x-1$	Polymnom 2. Grades

Polynomdivision bezeichnet die Umkehrung von Polynommultiplikation:

Es ist $\left(x^2+x+1\right) \cdot (x+1) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Deshalb $\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x+1} = x^2+x+1$

Wie findet man das aber?

$$\begin{aligned}
\left(x^3+2x^2+2x+1\right) : (x+1) &= \\
\left(x^3+x^2+x^2+x+x+1\right) : (x+1) &= \\
\left(x^3+x^2\right) : (x+1) + \left(x^2+x\right) : (x+1) + (x+1) : (x+1) &= \\
x^2(x+1) : (x+1) + x(x+1) : (x+1) + (x+1) : (x+1) &= x^2+x+1
\end{aligned}$$

Das Ausleihen von Termen geht aber auch brutaler:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3+2x^2+2x+1\right) : (x+1) = x^2+x+1 \\
\underline{x^3+x^2} \\
\qquad x^2+2x+1 \\
\qquad \underline{x^2+x} \\
\qquad\qquad x+1
\end{array}$$

Einige Aufgaben:

$\frac{x^3-4x^2+10x-12}{x-2} = x^2-2x+6$

$\frac{4x^4-17x^2+4}{4x^2-1} = x^2-4$

$$\frac{x^3+27}{x+3} = x^2-3x+9$$

$$\frac{x^2-2ax-3a^2}{x+a} = -3a+x$$

$$\frac{x^2+7x+12}{x+3} = x+4$$

$$\frac{5x^3-16x^2+58x-11}{x^2-3x+11} = 5x-1$$

$$\frac{x^3+\frac{1}{8}}{2x+1} = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$$

$$\frac{81x^8+4y^4}{9x^4+6x^2y+2y^2} = 2y^2-6x^2y+9x^4$$

$$\frac{8x^3+2x^2-3x+1}{2x+1} - \frac{2}{2x+1} = 4x^2-x-1$$

$$\frac{a^4+b^4}{a^2-\sqrt{2}\,ab+b^2} = a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2$$

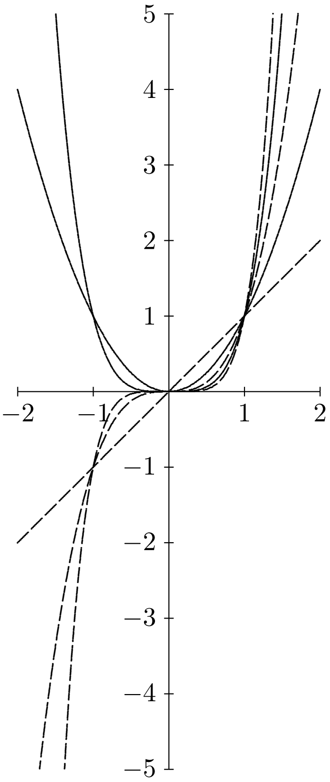
$$\frac{x^5+1}{x+1} = x^4-x^3+x^2-x+1$$

$$\frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x-1} = x^2+x+1$$

$$\frac{x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{37}{4}x-\frac{21}{4}}{3x+9} = \frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{7}{12}$$

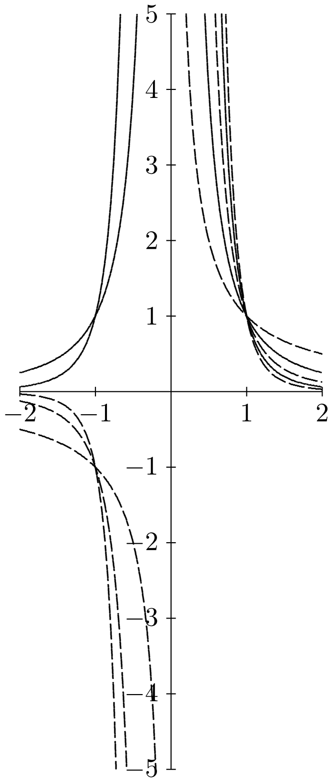
1.8 Potenzfunktion / Monotonie für die Basis (1)

Def.: Die Zuordnung $x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ heißt Potenzfunktion.
Ihr Graph (für $x \in \mathbb{R}$) heißt Parabel n-ter Ordnung.
Auch die Zuordnung $x \mapsto x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$ heißt Potenzfunktion.
Ihr Graph (für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$) heißt Hyperbel n-ter Ordnung.



$\longleftarrow$ Parabeln				
x	x^2	x^3	x^4	x^5
0	0	0	0	0
0,4	0,16	0,06	0,02	0,01
0,6	0,36	0,22	0,13	0,08
0,9	0,81	0,73	0,66	0,59
1	1	1	1	1
1,2	1,44	1,73	2,07	2,49
1,4	1,96	2,74	3,84	5,38
1,6	2,56	4,10	6,55	10,49

Hyperbeln $\longrightarrow$				
x	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}	x^{-4}
0,2	5	25	125	625
0,4	2,5	6,25	15,6	39,1
0,6	1,67	2,78	4,63	7,72
0,8	1,25	1,56	1,95	2,44
1	1	1	1	1
1,2	0,83	0,69	0,58	0,48
1,4	0,71	0,51	0,36	0,26
1,6	0,63	0,39	0,24	0,15
2	0,5	0,25	0,13	0,06



dass im ersten Quadranten die Parabeln streng monoton steigen und die Hyperbeln streng monoton fallen beweist folgender

Satz (Basismonotonie): Für alle $a, b \in \mathbb{R}^+; n \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad a < b \iff a^n < b^n \iff a^{-n} > b^{-n}$

Bew.: Es ist ein Axiom der positiven reellen Zahlen, dass mehr rauskommt, wenn man größere Zahlen miteinander multipliziert.

Bsp.:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \quad < \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}037 \quad < \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}125$$

$$3^{-1} \cdot 3^{-1} \cdot 3^{-1} = 0,037 \quad < \quad 2^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-1} = 0,125$$

Nicht so bei negativen Zahlen:

$$(-3)(-3) = 9 > (-2)(-2) = 4$$

Potenzfunktionen gerader Ordnung sind zur y-Achse symmetrisch, solche ungerader Ordnung sind zum Nullpunkt symmetrisch.

Bew.: n gerade: $(-x)^n = x^n$ und $(-x)^{-n} = \dfrac{1}{(-x)^n} = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$

n ungerade: $(-x)^n = -x^n$ und $(-x)^{-n} = \dfrac{1}{(-x)^n} = \dfrac{1}{-x^n} = -x^{-n}$

Die Wertemenge einer geraden Potenzfunktion ist deshalb $\mathbb{R}^+$ (Hyperbel) bzw. $\mathbb{R}_0^+$ (Parabel), die einer ungeraden $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (Hyperbel) bzw $\mathbb{R}_0^+$ (Parabel).

1.9 Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Die Schreibfigur a^x hat bisher nur eine Bedeutung für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; x \in \mathbb{Z}$ (siehe früher). Der Bereich für den Exponenten x hat noch große Lücken, die wir sinnvoll füllen wollen.
Es sollen möglichst die gleichen Gesetze gelten, wie schon bei ganzen Exponenten. Wir orientieren uns vorerst am 5. Gesetz:

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 \overset{5.}{=} 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3^1 = 3$$

oder allgemeiner für* $a \in \mathbb{R}_0^+; n \in \mathbb{N}$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \overset{5.}{=} a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$$

weswegen wir vereinbaren:

Def.: Ist $a \in \mathbb{R}_0^+; n \in \mathbb{N}$, so soll $a^{\frac{1}{n}}$ jene positive Zahl sein, die in der $n-$ten Potenz a ergibt.
Man schreibt auch $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$.

Es gibt immer genau eine solche Zahl, wie sie die Definition verlangt: Wir zeigen das am Beispiel $2^{\frac{1}{3}}$.
Auf Grund des vorher besprochenen Monotoniegesetzes sind die folgenden linken Seiten richtig, weil ja sonst die rechten Seiten falsch wären.

(Es muß z.B. $2^{\frac{1}{3}} < 2$ *sein, weil ja sonst nicht* $2 = (2^{\frac{1}{3}})^3 < 2^3 = 8$ *gelten könnte)*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & < & 2^{\frac{1}{3}} & < & 2 & \Longleftarrow & 1^3 (= 1) & < & 2 & < & 2^3 (= 8) \\
1.2 & < & 2^{\frac{1}{3}} & < & 1.3 & \Longleftarrow & 1.2^3 (= 1,72...) & < & 2 & < & 1,3^3 (= 2,19...) \\
1.25 & < & 2^{\frac{1}{3}} & < & 1.26 & \Longleftarrow & 1.25^3 (= 1,95...) & < & 2 & < & 1,26^3 (= 2,0003...) \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Die *Intervallschachtelung* zieht sich auf *genau eine* bestimmte Zahl zusammen.

Sei nun $m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}^{+\,?}$. Was könnte $a^{\frac{m}{n}}$ bedeuten?
Auch hier soll wieder unter anderem das 5. Potenzgesetz gelten: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m$, weshalb wir definieren:

Def.: Ist $a \in \mathbb{R}^{+?}; m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}$, dann soll $a^{\frac{m}{n}}$ jene positive Zahl sein, die in der $n-$ten Potenz a^m ergibt.
Man schreibt auch $\sqrt[n]{a^m} := a^{\frac{m}{n}}$.

Die beiden Definitionen für $a^{\frac{1}{n}}$ und $a^{\frac{m}{n}}$ sind nur dann sinnvoll, wenn sie widerspruchsfrei sind. Dazu untersuchen wir einige Fragen (und überlegen vorher, warum das überhaupt Fragen sind):

- Hoffentlich ist $3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}$:

$$x := a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \implies x^n = a^m \iff (x^n)^k = (a^m)^k \implies x^{kn} = a^{km}$$

x ist also diejenige Zahl, die in der $kn-$ten Potenz a^{km} ergibt, dh.

$$a^{\frac{m}{n}} = x = \sqrt[kn]{a^{km}} = a^{\frac{km}{kn}}$$

- Hoffentlich ist $3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{-1}{2}} = 3^{\frac{1}{-2}}$:

* Wir lassen deshalb nur $a \in \mathbb{R}_0^+$ zu, weil z.B. $\left((-3)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = -3$ nicht sein kann, da Quadrate immer positiv sind.

? 0 muß jetzt wieder ausgeschlossen werden, denn 0^{-x} hieße Null im Nenner.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} =: x \quad\Longrightarrow\quad x^n = \frac{1^n}{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n} = \frac{1}{a^m} \quad\Longrightarrow\quad x = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = a^{\frac{-m}{n}}$$

$$\Longrightarrow\quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} = a^m \quad\Longrightarrow\quad x = \sqrt[-n]{a^m} = a^{\frac{m}{-n}}$$

- Hoffentlich stimmen außer dem 5. auch die anderen Potenzgesetze, z.B. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$:

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} &=: x \\ x^{ns} &= \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{ns} \cdot \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{ns} = a^{ms} \cdot a^{nr} = a^{ms+nr} \\ x &= \sqrt[ns]{a^{ms+nr}} = a^{\frac{ms+nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}} \end{aligned}$$

- dass die restlichen Potenzgesetze auch gelten, glauben wir dem Lehrer ohne Beweis.

Beachte die Beschränkung der Basis auf positive Werte, sonst...

- $-1 \stackrel{?}{=} (-1)^1 \stackrel{?}{=} (-1)^{\frac{2}{2}} \stackrel{?}{=} \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} 1^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} 1$
  $-1 \stackrel{?}{=} (-1)^1 \stackrel{?}{=} (-1)^{\frac{2}{2}} \stackrel{?}{=} \left((-1)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \stackrel{?}{=} \left(\sqrt{-1}\right)^2$
  Es ist zwar $-1 = -1$ und $1 = \frac{2}{2}$ aber $hoch^{\frac{2}{2}}$ ist nur für positive Basen zugelassen, das jeweils 2. Gleichheitszeichen ist also falsch!
- $\sqrt[3]{(-5)^2} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$ aber $\sqrt[3]{(-5)^2} \neq (-5)^{\frac{2}{3}}$
- Für $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt[4]{x^2} = x^{\frac{2}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$
  Für $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt[4]{x^2} \neq x^{\frac{2}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$, lediglich $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{|x|^2} = |x|^{\frac{2}{4}} = |x|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x|}$
  Weitere Aufgaben in Ehrenwirth S. 61

1.10 Potenzfunktion / Monotonie für die Basis (2)

Satz (Basismonotonie): Für alle $a, b \in \mathbb{R}^+; m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad a < b \iff a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}} \iff a^{-\frac{m}{n}} > b^{-\frac{m}{n}}$

Bew.: Wir zeigen erst $(*)$: $a < b \iff a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$
und zwar mit Hilfe des schon bekannten Satzes über die Basismonotonie (B)

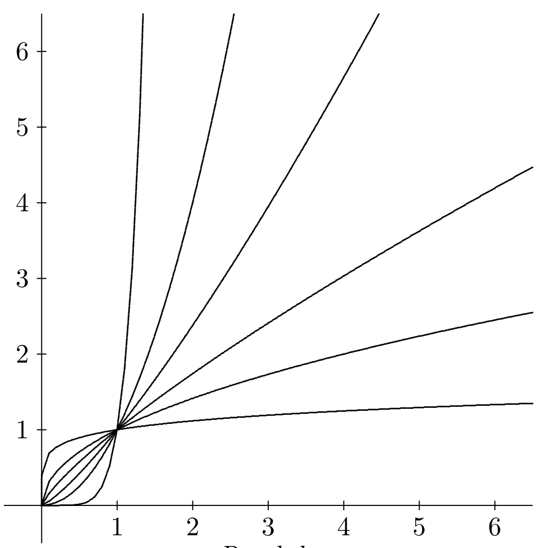
$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right) < \left(b^{\frac{1}{n}}\right) \stackrel{(B)}{\iff} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n < \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n \iff a < b$$

Nun folgt aus $(*)$ und nochmal (B):

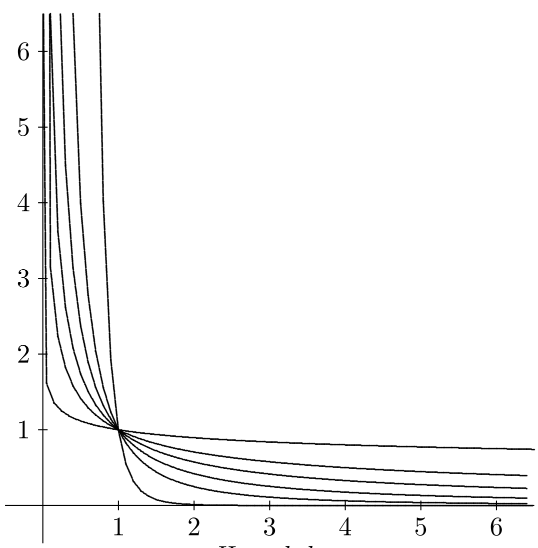
$$a < b \stackrel{(*)}{\iff} a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}} \stackrel{(B)}{\iff} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m < \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m \iff a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}} \qquad \textit{qed.}$$

$$\iff \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} > \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}} \iff a^{-\frac{m}{n}} > b^{-\frac{m}{n}} \qquad \textit{qed.}$$

Da wir uns jetzt auf positive Basis beschränkt haben, betrachten wir die Graphen der neu hinzugekommenen Parabeln und Hyperbeln nur noch im ersten Quadranten. Ihr Aussehen ist den bisher bekannten sehr ähnlich. (Die Werte für die Exponenten sind $\frac{4}{25}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{25}{4}$ bei den Parabeln und die gleichen Werte negativ bei den Hyperbeln.)



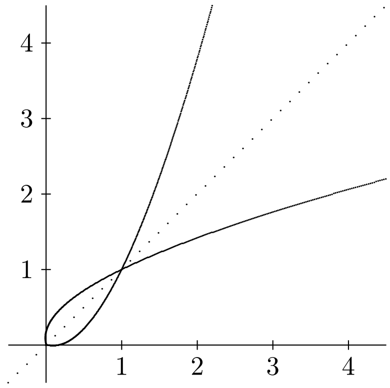
Parabeln



Hyperbeln

1.11 Die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen

Def.: Die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f macht die Ergebnisse der Funktion rückgängig.



Bsp.: Die Quadratfunktion und die Wurzelfunktion heben sich auf. Die eine ist Umkehrfunktion der anderen:

x	$\mapsto f(x) = x^2$		x	$\mapsto f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}$	
0	$\mapsto$	0	0	$\mapsto$	0
1	$\mapsto$	1	1	$\mapsto$	1
2	$\mapsto$	4	4	$\mapsto$	2
3	$\mapsto$	9	9	$\mapsto$	3
4	$\mapsto$	16	16	$\mapsto$	4
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Allgemein ist $f^{-1}(x) = x^{\frac{n}{m}}$ die Umkehrfunktion von $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ für $x \in \mathbb{R}_0^+$ denn:

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = x \quad \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

Ebenso ist $f^{-1}(x) = x^{-\frac{n}{m}}$ die Umkehrfunktion von $f(x) = x^{-\frac{m}{n}}$ für $x \in \mathbb{R}^+$ denn:

$$\left(x^{-\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{n}{m}} = x \quad \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Da sich Funktion und Umkehrfunktion nur durch vertauschte $x-$ und $y-$Werte unterscheiden, sind ihre Graphen spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.
Was von der einen die Definitionsmenge, ist von der anderen die Wertemenge.

1.12 Potenzgleichungen

Mit Hilfe von Potenzen mit allgemein rationalen Exponenten können wir eine neue Familie von Gleichungen lösen, die Potenzgleichungen.

Def.: Potenzgleichungen sind Gleichungen der Form $x^n = a$ mit $n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}$.

Bsp.:
$x^4 = 5 \quad L = \{+\sqrt[4]{5}; -\sqrt[4]{5}\}$
$x^4 = 0 \quad L = \{0\}$
$x^4 = -5 \quad L = \{\}$

$x^3 = 5 \quad L = \{\sqrt[3]{5}\}$
$x^3 = 0 \quad L = \{0\}$
$x^3 = -5 \quad L = \{-\sqrt[3]{5}\}$

So dass wir zusammenfassend feststellen:

	Lösungen von $x^n = a$ bei	
	n gerade	n ungerade
$a \geq 0$	$\pm\sqrt[n]{a}$	$+\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	keine Lösung	$-\sqrt[n]{-a}$

1.13 Irrationale Exponenten / Monotonie für den Exponenten

Was könnte $3^{\sqrt{2}}$ bedeuten, wo doch $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$ ist? Bedenke hierzu aber, dass

$$\begin{array}{ccccc} 1 & < & \sqrt{2} & < & 2 \\ 1,4 & < & \sqrt{2} & < & 1,5 \\ 1,41 & < & \sqrt{2} & < & 1,42 \\ 1,414 & < & \sqrt{2} & < & 1,415 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

eine Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$ ist, und man deshalb folgendes versuchen kann:

$$\begin{array}{lcccccl} 3 & = & 3^1 & < & 3^2 & = & 9 \\ 4,655\ldots & = & 3^{1,4} & < & 3^{1,5} & = & 5,196\ldots \\ 4,706\ldots & = & 3^{1,41} & < & 3^{1,42} & = & 4,758\ldots \\ 4,727\ldots & = & 3^{1,414} & < & 3^{1,415} & = & 4,732\ldots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Man müßte nur sicher sein, dass die Randzahlen wieder eine Intervallschachtelung für irgendeine Zahl sind, die man dann als Ergebnis nehmen würde. Man zeigt hierfür (1) dass die Grenzen monoton steigen bzw. fallen und (2) dass der Abstand zwischen ihnen beliebig eng wird.

Zu (1):

Satz (Exponentenmonotonie): Für $a > 1 \quad (a \in \mathbb{R}); \quad s, S \in Q$ gilt: $s < S \Longleftrightarrow a^s < a^S$
Für $0 < a < 1 \quad (a \in \mathbb{R}); \quad s, S \in Q$ gilt: $s < S \Longleftrightarrow a^s > a^S$

Bew.:

$$s < S \Longleftrightarrow S - s > 0 \Longleftrightarrow \frac{a^S}{a^s} = a^{S-s} \overset{*}{>} 1^{S-s} = 1 \Longleftrightarrow a^S > a^s$$

wobei * für den Satz über die Basismonotonie steht *qed.*

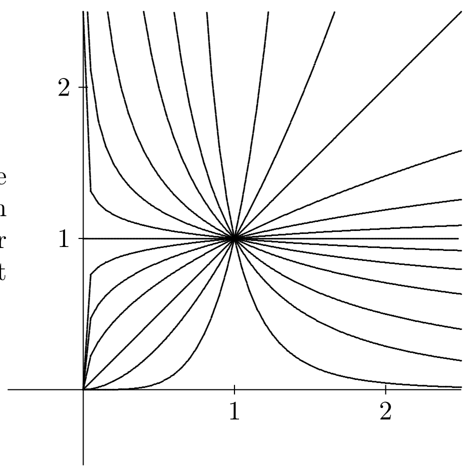
Nun ist $\frac{1}{a} > 1$, und wir bekommen

$$s < S \Longleftrightarrow S - s > 0 \Longleftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^S}{\left(\frac{1}{a}\right)^s} = \left(\frac{1}{a}\right)^{S-s} > 1^{S-s} = 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^S > \left(\frac{1}{a}\right)^s \Longleftrightarrow a^S < a^s \qquad \textit{qed.}$$

Zu (2):

$$\begin{array}{ccccccc}
3^2 & - & 3^1 & = & 3^1 & \cdot & (3^1 - 1) \\
3^{1,4} & - & 3^{1,5} & = & 3^{1,4} & \cdot & (3^{0,1} - 1) \\
3^{1,41} & - & 3^{1,42} & = & 3^{1,41} & \cdot & (3^{0,01} - 1) \\
\vdots & & & & \vdots & & \downarrow \\
 & & & & & & \underbrace{(3^0 - 1)} \\
 & \text{Abstand} & & = & 3^{\sqrt{2}} & \cdot & 0
\end{array}$$

Potenzfunktionen



Die Graphen der Potenzfunktionen mit irrationalen Exponenten bringen keine neuen Erkenntnisse: Definitionsmenge, Wertemenge und Aussehen wie bei den rationalen Exponenten. Das Bild zeigt nochmal eine Zusammenfassung aller möglichen Potenzfunktionen (weshalb die Basis auf positive Werte beschränkt bleiben muß). Die Exponenten sind $\pm 4,5$; $\pm 1,8$; ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{4}$; $\pm\frac{1}{11}$ und 0:

Beachte: Die Umkehrfunktion von $x^{\sqrt{5}}$ ist $x^{1/\sqrt{5}}$, denn

$$\left(3^{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 3^1 = 3$$

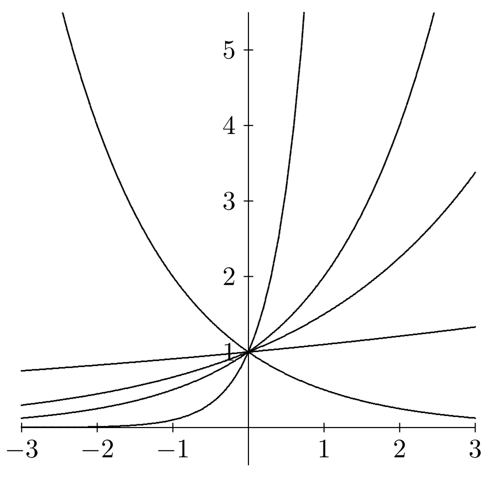
2 Exponential- und Logarithmusfunktionen

2.1 Exponentialfunktionen

Jetzt, da wir eine (positive) Basis mit jeder beliebigen reellen Zahl potenzieren können, betracheten wir die Abhängigkeit des Potenzwertes vom Exponenten und nicht mehr, wie bei den Potenzfunktionen, die Abhängigkeit von der Basis, also

Def.: Die Zuordnung $x \mapsto a^x \quad (a \in \mathbb{R}^+; x \in \mathbb{R})$ heißt Exponentialfunktion (zur Basis a).
Ihr Graph heißt Exponentialkurve.

Exponentialkurven					
x	$1,1^x$	$1,5^x$	2^x	10^x	$0,5^x$
−3	0,751	0,296	0,125	0,001	8
−2,5	0,788	0,363	0,177	0,003	5,657
−2	0,826	0,444	0,25	0,01	4
−1,5	0,867	0,544	0,354	0,03	2,828
−1	0,909	0,666	0,5	0,1	2
−0,5	0,953	0,816	0,707	0,316	1,414
0	1	1	1	1	1
0,5	1,049	1,225	1,414	3,162	0,707
1	1,1	1,5	2	10	0,5
1,5	1,154	1,837	2,828	31,623	0,354
2	1,21	2,25	4	100	0,25
2,5	1,269	2,756	5,657	316,23	0,177
3	1,331	3,375	8	1000	0,125



2.2 Eigenschaften der Exponentialfunktionen

1. $y = a^x > 0$ für alle x, denn siehe die Definitionen von $a^{\frac{1}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}$ und a^s.
2. Die Graphen gehen alle durch $(0|1)$, denn $a^0 = 1$ unabhängig von der Basis.
3. Die Graphen von $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sind symmetrisch zur $y-$Achse, denn $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ bzw. $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.
4. Für $a > 1$ steigen die Graphen streng monoton, denn $x_1 < x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$,
für $0 < a < 1$ fallen die Graphen streng monoton, denn $x_1 < x_2 \Longleftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$,
und zwar jeweils wegen der Exponentenmonotonie.
5. Für $a > 1$ steigen die Funktionswerte bei einem Schritt um 1 nach rechts auf das $a-$fache, sodass die Graphen also rechts beliebig weit steigen, links beliebig nahe an 0 herankommen (die $x-$Achse ist *Asymptote*). Für $0 < a < 1$ verhält sich alles umgekehrt.
6. Man kann mit Hilfe von Intervallschachtelungen auch zeigen, dass die Exponentialfunktionen jeden (positiven) $y-$Wert annehmen, dass also die Wertemenge $\mathbb{R}^+$ ist. dass die auftretenden Intervalle aber eine Schachtelung darstellen, können wir mit Schulmitteln nicht beweisen.

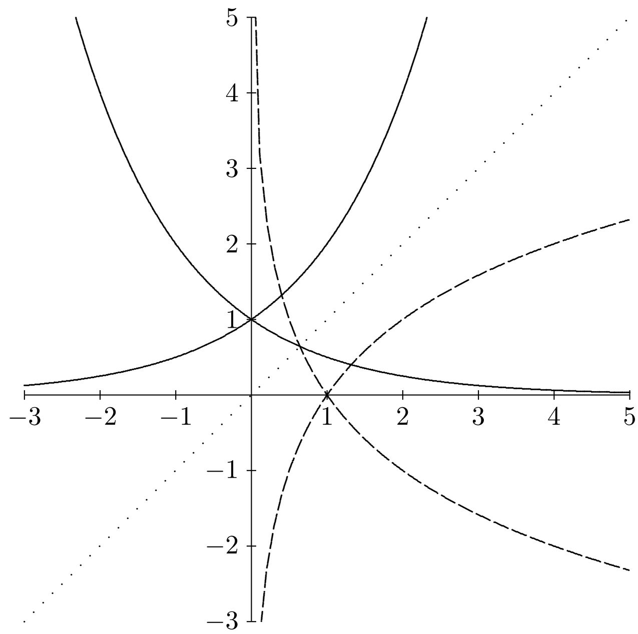
   Wir gewinnen einen Überblick an der Überlegung, dass ein x existiert, für das $2^x = 5$ gilt. Auf Grund der Exponentenmonotonie wissen wir, dass 2^x umso größer wird, je größer x ist (da $2 > 1$). Wir finden deshalb einfach durch Ausprobieren

$$\begin{aligned}
2^2 &< 5 < 2^3 \\
2^{2,3} &< 5 < 2^{2,4} \\
2^{2,32} &< 5 < 2^{2,33} \\
2^{2,321} &< 5 < 2^{2,322} \\
\vdots & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

   Die obigen Exponenten bilden nun aber tatsächlich eine Intervallschachtelung und repräsentieren damit das gesuchte $x = 2,3219\ldots$

2.3 Logarithmusfunktionen als Umkehrung

Zu jeder Exponentialfunktion gibt es als Umkehrfunktion eine entsprechende Logarithmusfunktion. Die Exponentialfunktion zeigt zu einem waagrechten $x-$Wert an, wieviel a^x ist, die entsprechende Logarithmusfunktion hingegen findet zu gegebenem a^x den zugehörigen $x-$Wert. Die Auftragung ist aber selbstverständlich wieder „andersherum", dh. gespiegelt an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten, so dass, wie üblich, das Gegebene waagrecht und das Gesuchte senkrecht aufgetragen wird.



Jetzt ist also $a^l = u$ mit a und u gegeben und l gesucht. Wenn der Exponent gesucht wird, nennt man ihn auch Logarithmus, oder genauer:

Def.: Die Zahl l, mit der man a potenzieren muß um u zu erhalten, nennt man *Logarithmus von u zur Basis a*. Geschrieben: $\log_u a$

Beachte: Wir beschränken uns wieder auf die allgemein brauchbarsten Fälle wo $a, u > 0$ und vernünftigerweise $a \neq 1$.

Aufgaben: Suche mit dem Taschenrechner die Lösung von $2^l = 10$ dh. $l = \log_2 10$. Ergebnis: $l = 3,321928095\ldots$
Formuliere die Eigenschaften der Logarithmusfunktionen an Hand der bereits bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktionen.

2.4 Rechnen mit Logarithmen

Seien u und v irgendwelche Potenzen zu irgend*einer* (positiven) Basis:

$$u = a^{l_1}; \quad v = a^{l_2} \qquad \text{oder} \qquad l_1 = \log_a u; \quad l_2 = \log_a v$$

Dann gilt für das Produkt und dessen Logarithmus

$$u \cdot v = a^{l_1} \cdot a^{l_2} = a^{l_1+l_2}$$
$$\log_a(u \cdot v) = \log_a a^{l_1+l_2} = l_1 + l_2 = \log_a u + \log_a v$$

und für den Quotienten und dessen Logarithmus

$$\frac{u}{v} = \frac{a^{l_1}}{a^{l_2}} = a^{l_1-l_2}$$
$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a a^{l_1-l_2} = l_1 - l_2 = \log_a u - \log_a v$$

außerdem für die Potenz und dessen Logarithmus

$$u^r = \left(a^{l_1}\right)^r = u^{rl_1}$$
$$\log_a u^r = \log_a a^{rl_1} = rl_1 = r \cdot \log_a u$$

Dabei waren $u, v > 0$, weil $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$; außerdem $r \in \mathbb{R}$. Dies fassen wir zu einem Satz zusammen:

Satz:	Für $u, v \in \mathbb{R}^+$; $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$; $r \in \mathbb{R}$ gilt:
	1. $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
	2. $\log_a u^r = r \cdot \log_a u$

Achtung: $\log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$
$(\log_2 2)^3 = 1^3 = 1$

Auf dem Taschenrechner gibt es nur für die Logarithmen zur Basis 10 und e eine Taste. Trotzdem kann man mit ihm jeden beliebigen Logarithmus ausrechnen, und zwar mit Hilfe folgender Überlegung:

Der Taschenrechner kann $\log_{10} x =: \lg x$, gesucht ist aber $\log_a x$.

Nach Definition gilt	$a^{\log_a x} = x$
Trick	$\lg a^{\log_a x} = \lg x$
2. Regel	$(\log_a x) \cdot \lg a = \lg x$
Also	$\log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$

Statt $\lg x$ geht auch jeder andere $\log_c x$, deshalb:

$$\boxed{\text{Umrechnungsformel: } \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}}$$

2.5 Sachaufgaben

Kauft man für die Zinsen, die man auf ein Kapital bekommt, Joghurt, so nimmt die Joghurt-Menge mit der Zeit *linear* zu, d.h. nach der doppelten Zeit hat man doppelt soviel Joghurt. Läßt man aber die Zinsen auf dem Konto, so werden sie als Kapital betrachtet und mitverzinst. Das Kapital wächst also stärker als linear, es wächst *exponentiell*, denn bei 5% Zinssatz hat man nach einem Jahr das 1,05-fache des Anfangskapitals, genauer

Startkapital	$K_0 = K_0 \cdot 1$		$= K_0 \cdot 1,05^0$
nach 1. Jahr	$K_1 = K_0 \cdot 1,05$		$= K_0 \cdot 1,05^1$
nach 2. Jahr	$K_2 = K_1 \cdot 1,05$		$= K_0 \cdot 1,05^2$
nach 3. Jahr	$K_3 = K_2 \cdot 1,05$		$= K_0 \cdot 1,05^3$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
nach n. Jahr	$K_n =$	$\dots$	$= K_0 \cdot 1,05^n$

Das Ganze gibt es auch in einer abnehmenden Version: Beim radioaktiven Zerfall wandeln sich einzelne Atome einer gegebenen Menge um; jedoch nicht linear, also nach der doppelten Zeit die doppelte Anzahl, sondern nur ein gewisser Bruchteil der *noch vorhandenen* nicht umgewandelten Atome. Bei ^{231}U zerfallen pro Tag etwa 16%.

Anfangsmenge	$m_0 = m_0 \cdot 1$		$= m_0 \cdot 0,94^0$
nach 1. Tag	$m_1 = m_0 \cdot 0,94$		$= m_0 \cdot 0,94^1$
nach 2. Tag	$m_2 = m_1 \cdot 0,94$		$= m_0 \cdot 0,94^2$
nach 3. Tag	$m_3 = m_2 \cdot 0,94$		$= m_0 \cdot 0,94^3$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
nach n. Tag	$m_n =$	$\dots$	$= m_0 \cdot 0,94^n$

Interessiert man sich für den Zustand nach einer beliebigen Zeit t, so ersetzt man die Exponenten passend. Im letzten Beispiel liegen nach $T = 1d$ noch $v = 94\%$ unzerfallen vor. Die allgemeine Formel lautet dann

$$\boxed{m(t) = m_0 \cdot v^{\frac{t}{T}}}$$

Aufgabe: Wie hoch muß der Zinssatz sein, damit sich ein Kapital nach 30 Jahren verdoppelt?

$$\begin{aligned} K_{30} = 2K_0 &= K_0(1+p)^{30} \\ 2 &= (1+p)^{30} \\ 2^{\frac{1}{30}} &= 1+p \\ 2^{\frac{1}{30}} - 1 &= p = 0,023\ldots \end{aligned}$$

Aufgabe: Nach wie vielen Jahren hat sich bei einem Zinssatz von 0,06 ein Kapital verdoppelt?

$$\begin{aligned} K_n = 2K_0 &= K_0 \cdot 1,06^n \\ 2 &= 1,06^n \\ 11,98\ldots &= n \approx 12 \end{aligned}$$

Aufgabe: Die Erdbevölkerung ver-1,5-facht sich alle 30 Jahre. 1990 gab es $4,52 \cdot 10^9$ Menschen. Wie viele sind es 1930, 2000, 2100? Wann lebten Adam und Eva? (Antworten: 2 Mrd., 5,17 Mrd., 19,99 Mrd.; $1990 - 1593 = 396$)

Aufgabe: ^{226}Ra hat eine Halbwertszeit von 1600 Jahren. Wann sinkt eine Strahlung auf $\frac{1}{10}$ ab?

2.6 Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen

Eine Gleichung, bei der die Variable im Exponenten vorkommt, heißt Exponentialgleichung, beim Logarithmus entsprechend. Zum Lösen jeder Gleichungsart braucht man irgendwann die jeweils gegengesetzte Rechenart, deshalb hier gleich beide.

Hier nun einige Musterbeispiele, die man lösen kann:

$$\begin{aligned} 5^x &= 12 \\ x &= \log_5 12 \\ x &= \frac{\lg 12}{\lg 5} \\ x &\approx 1,544 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,5^{2x+1} &= 7^{-x} \quad | \lg \\ (2x+1) \cdot \lg 1,5 &= -x \cdot \lg 7 \\ \frac{-\lg 1,5}{2 \cdot \lg 1,5 + \lg 7} &= x \approx -0,1471 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+4} &= 93 \\ 3^{x+1} \cdot (1 + 3 + 3^3) &= 93 \\ 3^{x+1} \cdot 31 &= 93 \\ 3^{x+1} &= 3 \\ x+1 &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3^{2x} &= 3^{x+3} - 34 \\ 5 \cdot (3^x)^2 &= 3^3 \cdot 3^x - 34 \\ 5z^2 - 27z + 34 &= 0 \\ z_1 = 2 \quad &\vee \quad z_2 = 3,4 \\ 3^x = 2 \quad &\vee \quad 3^x = 3,4 \\ x_1 = \log_3 2 \quad &\vee \quad \log_3 3,4 \end{aligned}$$

Beim Rechnen mit dem Logarithmus ist zu bedenken, dass die Rechengesetze nicht in ganz $\mathbb{R}$ gültig sind, sodass man entweder bei jedem Schritt aufpassen muß, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt, oder am Schluß die Probe machen muß.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & 2 \lg x = 4 \\ \iff & \lg x = 2 \\ \iff & x = 10^2 \\ \iff & x = 100 \end{aligned}$$

aber:

$$\begin{aligned} & 2 \lg x = 4 \\ \Longrightarrow & \lg x^2 = 4 \\ \iff & x^2 = 10^4 \\ \iff & x_1 = 100 \quad \vee \quad x_2 \neq -100 \end{aligned}$$

Bei den folgenden Aufgaben wird nicht mehr gesondert darauf hingewiesen, dass die Probe nötig ist

$$\begin{aligned} \log_4 x &= 5 \quad |4^{\cdots} \\ 4^{\log_4 x} &= 4^5 \\ x &= 4^5 = 1024 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg(5x+2) &= \lg(1-x) + 2 \\ \lg(5x+2) - \lg(1-x) &= 2 \\ \lg \tfrac{5x+2}{1-x} &= 2 \\ \tfrac{5x+2}{1-x} &= 10^2 \\ 5x+2 &= 100(1-x) \\ 105x &= 98 \\ x &= \tfrac{14}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{\log_2 x} &= x^4 \\ \log_2 x^{\log_2 x} &= \log_2 x^4 \\ \log_2 x \cdot \log_2 x &= 4 \cdot \log_2 x \\ z^2 &= 4z \\ z^2 - 4z = z(z-4) &= 0 \\ z = 0 \quad &\vee \quad z = 4 \\ \log_2 x = 0 \quad &\vee \quad \log_2 x = 4 \\ x = 1 \quad &\vee \quad x = 16 \end{aligned}$$

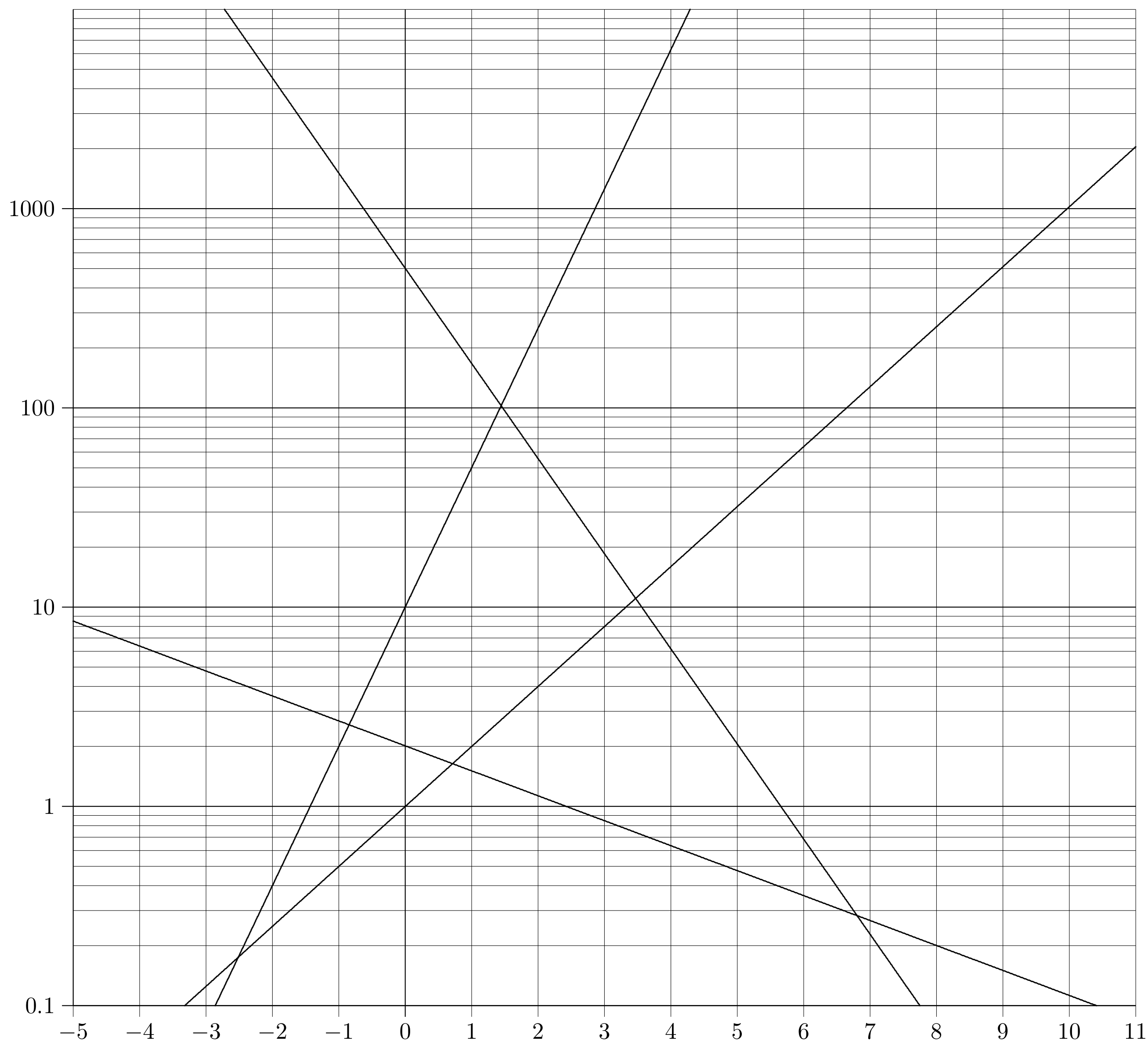
$$\begin{aligned} \log_9(x^2+1) &= \log_3(2x-1) \\ \frac{\log_3(x^2+1)}{\log_3 9} &= \log_3(2x-1) \\ \log_3(x^2+1) &= \log_3(2x-1)^2 \\ 3x^2 - 4x &= 0 \\ x_1 \neq 0 \quad &\vee \quad x_2 = \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

2.7 Einfach-logarithmisches Papier

Exponentialfunktionen sind z. B. nach rechts stark ansteigend. Zeichnet man sie jedoch in ein geeignet verzerrtes Koordinatensystem, so werden sie zu Geraden. Zu diesem Zweck müssen die rechts stark ansteigenden y-Werte sehr "gemildert" (heruntergezogen) werden, während die linken dahinkriechenden y-Werte der Übertreibung bedürfen, was ebenfalls auf ein nach-unten-ziehen hinausläuft. Die Zahl Null muß sogar unendlich weit nach unten und ist deshalb niemals auf dem Blatt. Wir zeigen, dass die Verzerrung mit Hilfe der Logarithmusfunktion bewerkstelligt wird (was denn auch sonst):

allgemeine Exponentialfunktion	$y = c \cdot a^x$
Y-Abmessung auf dem Papier	$\lg y = \lg(c \cdot a^x)$
	$\lg y = \lg c + x \cdot \lg a$
allgemeine Geradengleichung:	$Y = B + x \cdot M$

Exponentialfunktionen auf einfach logarithmischem Papier



Hat man einen Graphen – z. B. $y = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$ – auf log-Papier vorliegen, so kann man seine Formel ermitteln.

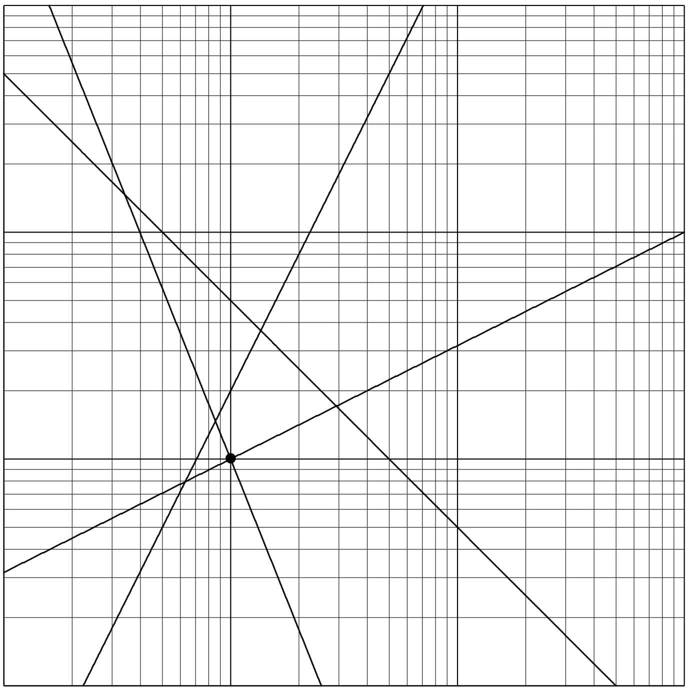
- Auf der Y-Achse liest man in diesem einfachen Fall $c = 2$ direkt ab. Ginge der Graph nicht genau durch eine Markierung, so müßte man zuerst feststellen, dass eine Y-Einheit (Dekade) 3 cm hoch ist und der Graph die Y-Achse bei 0,9 cm schneidet, das sind $\frac{0{,}9}{3} = 0,3$ Dekaden. Um den tatsächlichen y-Wert 2 zu bekommen, muß noch der lg herausgerechnet werden, d. h. $10^{0,3} = 1,995\ldots \approx 2$
- Nun setzten wir z. B. $x = 5$ ein und sehen, dass der Y-Wert ca. 1,9 cm tiefer oder $\frac{1{,}9}{3} \approx 0,63$ Dekaden tiefer liegt als bei $x = 0$. Damit ist $\lg a = \frac{\lg y - \lg c}{x} \approx \frac{-0{,}63}{5} = -0,126$ und folglich $a = 10^{-0,126} \approx 0,75 = \frac{3}{4}$.

Das Einzeichnen des Graphen einer gegebenen Exponentialfunktion ist einfacher. Man macht alles oben gesagte umgekehrt, rechnet also zu zwei x-Werten die jeweiligen y-Werte aus und zeichnet die Verbindungsgerade ein.

2.8 Doppelt-logarithmisches Papier

Verzerrt man auch die x-Achse logarithmisch, so werden die früher besprochenen Potenzfunktionen zu Geraden, wie die Rechnung neben der Abbildung zeigt:

Potenzfunktionen auf doppelt logarithmischem Papier



allgemeine Potenzfunktion	$y = c \cdot x^a$
Y-Abmessung auf dem Papier	$\lg y = \lg(c \cdot x^a)$
	$\lg y = \lg c + a \cdot \lg x$
allgemeine Geradengleichung:	$Y = B + M \cdot X$

Bei doppelt-logarithmischer Auftragung verwendet man meist in x- und y-Richtung gleich große Dekaden, verlassen kann man sich darauf aber nicht. In unserem Beispiel sind die Dekaden in beiden Richtungen 3 cm groß. (Wegen Platzmangel sind die Achsen nicht beschriftet. Der Punkt (1|1) ist aber fett markiert.) Wir stellen unsere Überlegungen an der zu findenden Formel $y = 2x^2$ an.

- dass $c = 2$ ist, findet man wie im entsprechenden Beispiel des einfachen Logarithmus.
- dass auch der Exponent $a = 2$ ist, liest man an der Steigung der Geraden ab. Geht man von einem beliebigen Punkt des Graphen z. B. eine halbe Dekade (=1,5 cm) nach rechts, so steigt er um eine ganze Dekade (=3 cm) an. Die Steigung beträgt also $1/\frac{1}{2} = 2$.

2.9 Die geometrische Reihe

Diese etwas weiter gehende Anwendung der Exponentialgesetze wird häufig vor allem in der Finanzmathematik gebraucht. Die Kapitalanlage mit Zinseszins tritt im alltäglichen Fall nämlich nicht in der reinen Form auf (wie im Kapitel *Sachaufgaben* beschrieben). So wird meist nicht eine bestimmte Summe eingezahlt und dann auf dem Konto belassen, sondern in regelmäßigen zeitlichen Abständen aufgestockt, z. B. 100 DM an jedem Monatsanfang.

Der Anfangsbetrag vermehrt sich dann (mit Zinseszins) die ganze Laufzeit, während die folgenden Einzahlungen immer weniger Laufzeit haben. Das Endkapital kann dann als eine Summe von mehreren unabhängig sich entwickelten Einzelanlagen betrachtet werden.

Zahlen wir n Monate lang monatlich das Kapital a_0 bei der monatlichen Vervielfältigung auf das q-fache ein (z. B. $a = 100$ DM; bei 3% Jahres-Zinssatz $q = 1 + \frac{1}{12} \cdot 0,03 = 1,0025$; für anderthalb Jahre Laufzeit $n = 18$), so entwickeln sich die Raten wie folgt:

Die 1. Rate läuft n	Monate lang und erreicht den Wert	$a_n = a \cdot q^n$
Die 2. Rate läuft $n-1$	Monate lang und erreicht den Wert	$a_{n-1} = a \cdot q^{n-1}$
Die 3. Rate läuft $n-2$	Monate lang und erreicht den Wert	$a_{n-2} = a \cdot q^{n-2}$
$\vdots$ $\vdots$		$\vdots$
Die n. Rate läuft 1	Monate lang und erreicht den Wert	$a_1 = a \cdot q^1$
Die aktuelle Rate läuft gar nicht, bleibt also beim Wert		$a_0 = a \cdot q^0$

Def.: Die Folge der Zahlen a_0, a_1, $a_2, \dots a_n$ nennt man *(endliche) geometrische Folge*, q heißt ihr Quotient, denn $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Daraus folgt unmittelbar $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$, weshalb man sagt: *Jedes Folgenglied ist das* geometrische *Mittel seiner Nachbarn.* Die Summe der Folgenglieder nennt man *(endliche) geometrische Reihe.*

Diese Summe s kann man nun durch einen Trick sehr einfach berechnen:

$$\begin{array}{rl} s = & a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^n \\ s \cdot q = & \phantom{a +{}} a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^n + a \cdot q^{n+1} \\ \hline s - s \cdot q = & a \phantom{{}+ a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^n} - a \cdot q^{n+1} \end{array}$$

Auflösen nach s ergibt schließlich (für $q \neq 1$):

$$\boxed{a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^n = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Für das oben genannte Beispiel ergibt sich also ein Endwert von

$$100 \text{ DM} \cdot \frac{1 - 1,0025^{19}}{1 - 1,0025} = 1943,36 \text{ DM}$$

Aufgabe: Die letzte Rate wurde etwas künstlich hinzugefügt, um genau die geometrische Reihe zu bekommen. Wie lautet die Formel ohne diese und was kommt raus? (Ergebnis 1843,36 DM)

Besonders interessant ist der Fall $q < 1$. Dann kann man nämlich auch unendlich viele Terme aufsummieren. Damit lassen sich verschiedenste Probleme leicht lösen. Z. B.

Aufgabe: Wandle $0,373737\ldots = 0,\overline{37}$ in einen Bruch um.

Lösung:

$$\begin{aligned}
0,373737\ldots &= \frac{37}{100} + \frac{37}{10000} + \frac{37}{1000000} \ldots \\
&= \frac{37}{100} + \frac{37}{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^1 + \frac{37}{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \ldots \\
&\overset{*}{=} \frac{37}{100} \cdot \frac{1 - 0}{1 - \frac{1}{100}} \\
&= \frac{37}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{37}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{37}{99}
\end{aligned}$$

Die 0 im zweiten Bruch von $*$ kommt daher, dass n beliebig groß wird und dadurch $\left(\frac{1}{100}\right)^{n+1} \to 0$ geht. Diese 0 entsteht immer, wenn $q < 1$ ist, deshalb gilt für die *unendliche geometrische Reihe*

$$\boxed{a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots = \frac{a}{1 - q}}$$

Wir können nun den Kern eines sehr alten griechischen Problems verstehen, ein Paradoxon von Zeno:

Aufgabe: Es ist 16.00 Uhr. Nach wie vielen Minuten überholt der große Zeiger den kleinen das erste Mal?

Man weiß aus der täglichen Erfahrung, dass der kleine Zeiger überholt wird, und doch kann man — ähnlich Zeno — recht überzeugend argumentieren:

Der kleine Zeiger geht zwar langsamer, doch wird er niemals (!) vom großen überholt, denn bis der dort ist, wo der kleine anfangs war, ist der schon wieder ein Stück weiter. Bis der große dieses kleine Stück zurückgelegt hat, ist der kleine schon wieder ein noch kleineres Stück weiter. Diese Argumentation kann man nun beliebig fortführen, woraus folgt, dass der kleine nie überholt wird.

Lage des großen Zeigers	*Lage des kleinen Zeigers*
0	20
$+\,20$	$+\,\frac{20}{12}$
$+\,\frac{20}{12}$	$+\,\frac{20}{12 \cdot 12}$
$+\,\frac{20}{12 \cdot 12}$	$+\,\frac{20}{12 \cdot 12 \cdot 12}$
$\vdots$	$\vdots$
$20 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\right)$	$20 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{12}\right)^{n}\right)$

$$\downarrow$$

$$\boxed{20 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} = 20 \cdot \frac{12}{11} = 21,\overline{81}}$$

Man sieht, dass links und rechts dasselbe herauskommt, aber erst nach unendlich vielen Schritten, das ist die gedankliche Falle. Zeno irrt aber, wenn er glaubt, dass für diese unendlich vielen gedanklichen Schritte auch unendlich viel Zeit verbraucht wird; es dauert nur $21\frac{9}{11}$ Minuten.

Lösung der Aufgabe wie man es in der 7. Klasse lernt:

$$\begin{aligned}
\text{Lage des großen Zeigers} &= \text{Lage des kleinen Zeigers} \\
z &= 20 + \frac{z}{12} \\
\frac{11}{12} \cdot z &= 20 \\
z &= 20 \cdot \frac{12}{11} = 21\frac{9}{11}
\end{aligned}$$