Textaufgaben schematisch lösen

Aufgabe 1: Ein Mann hinterlässt seinen drei besten Freunden 300 €. Im Testament bestimmt er, dass Anton um 40 € mehr als Benno erhalten soll; Christian aber soll halb soviel wie die beiden anderen zusammen bekommen. Wieviel bekommt jeder?

Diese Einstiegsaufgabe kann man auch ohne Training noch gut selbständig ausknobeln. Christian bekommt offensichtlich $\frac{1}{3}$ des Geldes. Die beiden anderen bekommen jeweils auch $\frac{1}{3}$, nur muss Benno noch 20 € an Anton zahlen. Die Begründung der 20 € (und nicht 40 €, wie auf die Schnelle gern vorgebracht wird) zeigt wieder mal, dass Textaufgaben unangenehm sind. Der schematische Ansatz fällt also auf fruchtbaren Boden:

$$\begin{aligned} x &= \textit{Anzahl} \text{ der Euro von Anton} \\ x-40 &= \textit{Anzahl} \text{ der Euro von Benno} \\ \tfrac{1}{2}\cdot\left(x+(x-40)\right) &= \textit{Anzahl} \text{ der Euro von Christian} \\ 300 &= \textit{Anzahl} \text{ der Euro insgesamt} \end{aligned}$$

Ansatz: $x+x-40+\frac{1}{2}\cdot\left(x+(x-40)\right)=300$

Lösen der Gleichung führt zu $x=120$. Was das bedeutet, sieht man in der vorher aufgestellten Liste. Noch ein bisschen Rechnen ergibt die anderen beiden Werte wie durch Zauberei. Die Summenprobe verläuft überzeugend.

Aufgabe 2: In einem Stall befinden sich Kaninchen und Fasanen, zusammen 35 Tiere mit 98 Füßen. Wie viele von jeder Sorte sind es?

Diese Aufgabe zeigt, wie aussichtslos Textaufgaben für den gesunden Menschenverstand erscheinen können. Umso erfreulicher, dass das soeben eingeführte Schema konsequent angewandt auch hier funktioniert.

$$\begin{aligned} x &= \textit{Anzahl} \text{ der Kaninchen(köpfe)} \\ 35-x &= \textit{Anzahl} \text{ der Fasanen(köpfe)} \\ x\cdot 4 &= \textit{Anzahl} \text{ der Kaninchenfüße} \\ (35-x)\cdot 2 &= \textit{Anzahl} \text{ der Fasanenfüße} \end{aligned}$$

Ansatz: $98 = x\cdot 4+(35-x)\cdot 2$

Lösen der Gleichung führt zu $x=14$, d.h. es gibt 14 Kaninchen und 24 Fasanen. Da man mit Hilfe der Köpfe die Anzahlen der Tiere gefunden hat, ist die Probe über die Füße die bessere. Sie entspricht dem Ansatz.

An dieser Stelle kann man schon die wichtigsten Schritte bei der Lösung von Textaufgaben zusammenfassen:

So wird's gemacht

- **Variable einführen:** Bei den meisten schwierigen Textaufgaben gewinnt man den Eindruck, dass zuviel unbekannt ist. Wüsste man nur eine zusätzlich Größe, so wäre die Lösung meist ganz leicht. Von dem, was man gerne wüsste, nimmt man nun an, dass man es weiß und kommt mit dieser Frechheit zu Erkenntnissen, die man brav nie gehabt hätte (wie so oft im Leben).

- **Weitere Terme aufstellen:** alle (wichtigen) Informationen aus der Aufgabe werden vom Deutschen „ins Mathematische“ übersetzt, damit der folgende Schritt leichter fällt.

- **Ansatz aufstellen:** Der Ansatz ist im weitesten Sinne eine „Wahrheit“, die feststellt, dass zwei Größen gleich sind. Hier treten vor allem zwei Probleme auf: Die „Wahrheit“ steht nicht immer ausdrücklich im Text (Bsp. weiter unten) und Tautologien sind zu vermeiden. Zu einer Tautologie führt z. B. folgender Gedankengang:

  > Die x Kaninchen haben $4x$ Füße, also bleiben für die Fasanen $98-4x$ Füße übrig. Da sie zusammen 98 Füße haben, folgt der Ansatz $4x+(98-4x)=98$, was mit $0=0$ endet. Solche Ansätze sind zwar richtig, führen aber zu keiner Lösung. Sie entstehen meist dadurch, dass man eine Information, die man beim Lesen vorher noch als ausschlaggebend erkannt hat, im Ansatz nicht verwendet hat (die 35 Köpfe kommen nicht vor, obwohl sie wichtig sind).

- **Lösung ausrechnen:** Da man das Rechnen mit Unbekannten schon vor den Textaufgaben übt, ist dieser Teil der am wenigsten problematische. Ab der 9. Klasse muss im Falle mehrerer Lösungen besonders aufgepasst werden, welche mit dem Text in Einklang stehen. Dazu dient die

- **Probe:** Widersprüche an dieser Stelle sollten ernst genommen. werden. Wenigstens einmal hat man den Text falsch interpretiert.

- **Antwort:** Ein letztes Mal hat man die Gelegenheit, sich zu überlegen, was denn eigentlich gefragt war. Nicht immer nimmt man als Unbekannte die gesuchte Größe; oft sind mehrere Größen gesucht. Ggf. muss noch eine kleine Rechnung durchgeführt werden. Hat man ohne Einheiten gerechnet, so sind diese jetzt mit anzugeben.

Aufgabe 3: In einem Dreieck ist γ doppelt so groß wie α während α ein Drittel der Größe von β hat. Berechne die drei Winkel.

Die Winkelsumme 180° wird nicht im Text genannt; es wird davon ausgegangen, dass der Leser sie kennt. Außerdem sieht man, dass man nicht immer mit x als Variable rechnen muss.

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{ein gesuchter Winkel} \\ 2\alpha &= \gamma \\ 3\alpha &= \beta \end{aligned}$$

Ansatz: $\alpha+2\alpha+3\alpha=180°$

Aufgabe 4: Lotte ist 19 Jahre alt. Als Helga 13 Jahre alt war, war Lotte ebenso alt, wie Helga jetzt ist. Wie alt sind beide jetzt?

Hier ist zunächst einmal ungewöhnlich, wie sich die Übersetzung des Textes in Mathematik entwickelt. Man erwartet vielleicht, dass die Aufstellung viel komplizierter aussehen sollte. (Tabellarisch ist zweckmäßig, aber nicht zwingend.) Nach der Aufstellung hat man dann seine Schwierigkeiten, einen Ansatz zu finden, der diesmal ein regelrechter Erhaltungssatz ist, der zudem im Text nicht genannt wird: *Der Altersunterschied früher und heute ist der gleiche.*

	heute	früher
Lotte	19	x
Helga	x	13

Ansatz: $19-x=x-13$

Die Probe löst hier besonders eindringlich die noch vorhandenen geistigen Knoten.

Aufgabe 5: Eine Mutter ist jetzt dreimal so alt wie ihre Tochter. In vier Jahren wird sie achtmal so alt sein, wie die Tochter vor sieben Jahren war. Wie alt sind beide jetzt?

Auf Grund der übersichtlichen Darstellung ist es einfacher, die wichtigen Daten und damit den Ansatz zu finden. Die tabellarische Form ist also wieder von Vorteil.

	vor 7 Jahren	jetzt	in 4 Jahren
Tochter	$x-7$	x	$x+4$
Mutter	$3x-7$	$3x$	$3x+4$

Ansatz: $3x+4=8\cdot(x-7)$

Aufgabe 6: Ein Swimmingpool kann durch zwei Röhren befüllt werden. Verwendet man nur die erste, so dauert die vollständige Füllung 4 h 48 min. Verwendet man beide, ist der Pool nach 72 min zu $\frac{5}{8}$ gefüllt. Wie lange würde eine Füllung allein mit der zweiten Röhre dauern?

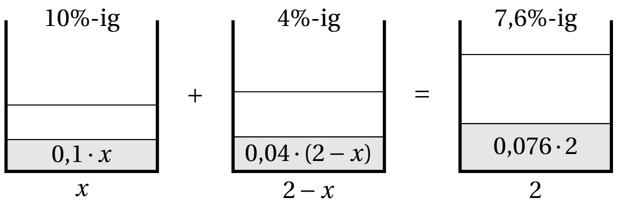
Dieser Aufgabentyp ist nicht so leicht schematisierbar und deshalb unbeliebt. Man findet die Lösung, wenn man schrittweise die Ideen notiert.

R_1 braucht für eine Füllung 288 min, schafft also in 1 min $\frac{1}{288}$ des Pools. R_2 braucht für eine Füllung x Minuten, schafft also in 1 min $\frac{1}{x}$ des Pools. Zusammen schaffen Sie in 1 min $\left(\frac{1}{288}+\frac{1}{x}\right)$ des Pools. In 72 min bewältigen sie demnach $72\cdot\left(\frac{1}{288}+\frac{1}{x}\right)$ des Pools. Das sind laut Angabe aber gerade $\frac{5}{8}$ des Beckens.

Der Ansatz lautet folgerichtig $72\cdot\left(\frac{1}{288}+\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{8}$ und führt zu $x=192$.

Aufgabe 7: Aus einer 10%-igen und einer 4%-igen Salzlösung sollen durch Mischen 2 kg einer 7,6%-igen Salzlösung hergestellt werden. Wie viele kg von jeder Sorte muss man mischen?

Das Verständnis von Mischungsaufgaben kann man durch eine Skizze sehr verbessern. Man muss sich dabei das Salz abgetrennt vom Wasser vorstellen. Ganz oben steht jeweils die Konzentration, unten das Gesamtgewicht und innen die absolute Salzmenge, die natürlich gerade das Produkt aus Masse und Konzentration ist. Wer mit Brüchen umgehen kann, sieht das sofort ein – leider sind das nur wenige Menschen.



Das Bild hat den gleichen Gehalt wie folgende Aufstellung:

x = kg der 10%-igen Salzlösung
$2-x$ = kg der 4%-igen Salzlösung
$0{,}1\cdot x$ = Salzmenge (in kg) in der 10%-igen Lösung
$0{,}04\cdot(2-x)$ = Salzmenge (in kg) in der 4%-igen Lösung
$0{,}076\cdot 2$ = Salzmenge (in kg) in der 7,6%-igen Lösung

Als Ansatz verwenden wir die Wahrheit, dass die Salzmenge im Gemisch gleich der Summe der Salzmengen in den Bestandteilen ist: $0{,}1\cdot x+0{,}04\cdot(2-x)=0{,}076\cdot 2$ führt zu $x=1{,}2$.

Aufgabe 8: Herr Mayer fährt normalerweise mit dem Bus um 7.25 Uhr von seiner Wohnung in sein Büro und geht nachmittags zu Fuß nach Hause. Dafür benötigt er insgesamt 1 h 10 min. Würde er *beide* Strecken *gehen*, so bräuchte er insgesamt 1 h 50 min, da er zu Fuß um 15 km/h langsamer ist als der Bus.

a) Wie lange bräuchte er, wenn er beide Strecken mit dem Bus führe?
b) Welche Daten benötigt man für Aufgabe a nicht?
c) Kann man folgende Fragen mit den gegebenen Daten beantworten?
   - Wann kommt er normalerweise in seinem Büro an?
   - Wie schnell geht er zu Fuß?
   - Wie schnell fährt der Bus?
   - Wie weit ist es von zu Hause bis zum Büro?

Diese Aufgabe ist im Grunde sehr einfach, wenn man ein bisschen selbständig nachdenkt und mit Zahlen umgehen kann. Wie schon bei der Mischungsaufgabe muss man sich beim Lesen des Textes genau darüber klar werden, was da worauf Einfluss hat. Hier ein paar Hinweise zur Lösung:

a) Da er zu Fuß für beide Strecken zusammen 1 h 50 min braucht, dauert eine Strecke 110 min : 2 = 55 min. Mit dem Bus fährt er demnach eine Strecke in $70-55=15$ min. Für beide Strecken bräuchte er mit dem Bus also 30 min.
b) Die Angaben 7.25 Uhr und 15 km/h sind bis hierher überflüssig.
c) Er kommt um 7.40 Uhr im Büro an. Er geht $5\frac{5}{8}$ km/h. Der Bus fährt $20\frac{5}{8}$ km/h. Die Entfernung beträgt $5\frac{5}{32}$ km.